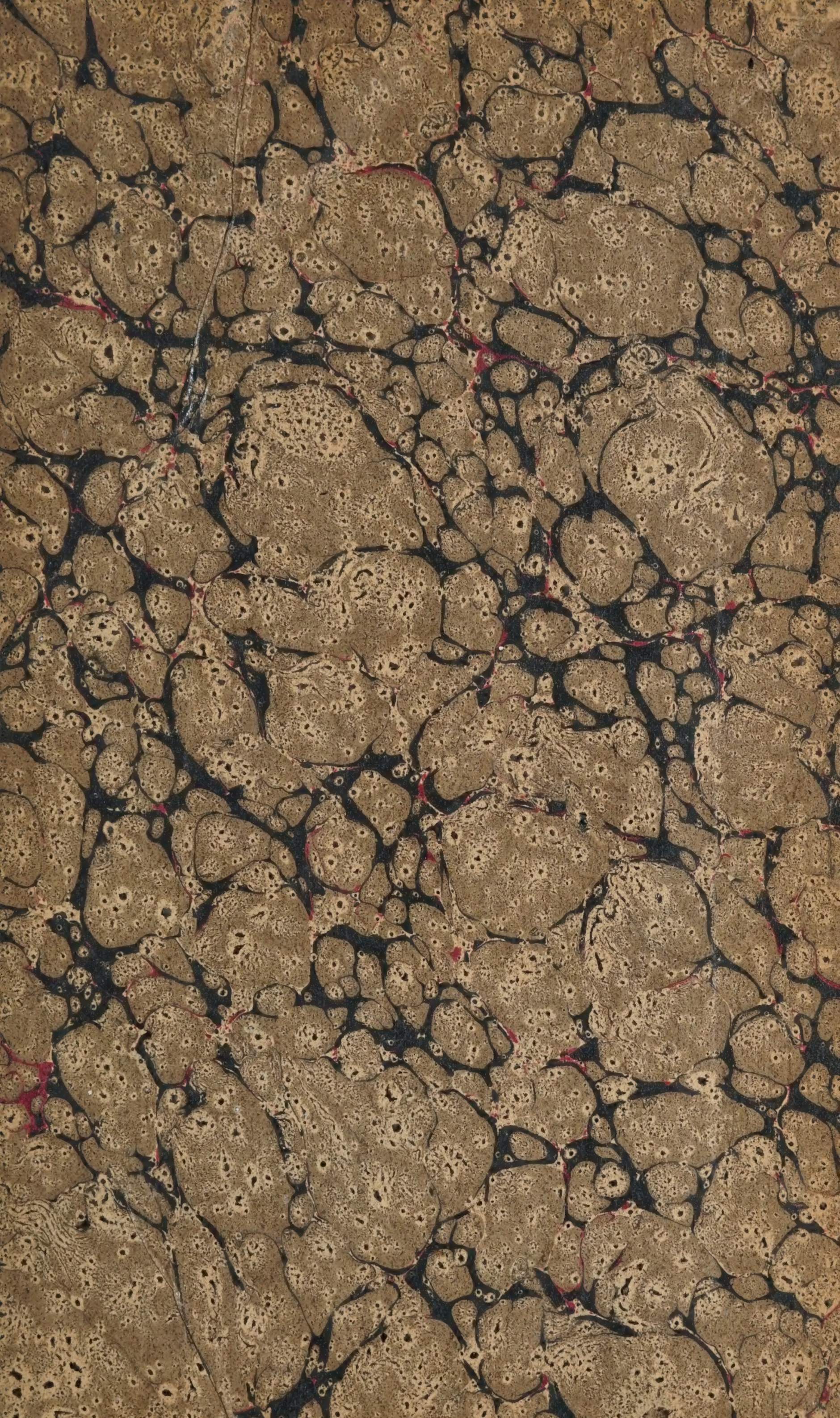






QUANTITÉS

IMAGINAIRES.

Autres Ouvrages du même Auteur.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, (renfermant la Trigonométrie et une introduction à la Géométrie descriptive); 1 vol. in-8°; prix. . 4 fr.

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE, (renfermant une introduction à l'Algèbre); 1 vol. in-8°; prix. . . . . 3 fr.

TRAITÉ DE STATIQUE D'APRÈS LE PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES; 1 vol. in-12, prix. . . . . 1 fr. 25 c.

ETC.

Signature de l'Auteur,

Gap. — Imprimerie d'Alfred ALLIER.

ESSAI

SUR

LA THÉORIE ET L'INTERPRÉTATION

DES

QUANTITÉS DITES IMAGINAIRES,

PAR A. FAURE,

Membre Associé-correspondant de l'Académie Royale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen.

PREMIER MÉMOIRE.

A PARIS,

CHEZ BACHELIER, LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

CHEZ PÉRISSE FRÈRES, RUE DU PETIT-BOURBON, 18.

1845.

PRÉFACE.

Je me permets, malgré la faiblesse de mon talent, d'écrire sur une question bien relevée et bien importante, *la Théorie des quantités imaginaires*. Jean Bernoulli et Moivre sont, au jugement de Lagrange, ceux à qui nous devons, sur ce sujet, les prémices de notre reconnaissance. Euler a donné aussi sur ces matières, comme sur tant d'autres, de beaux développements. Cependant, ces grands géomètres n'ont regardé les imaginaires que comme de purs symboles analytiques et abstraits, pouvant souvent conduire, par certaines combinaisons, à des résultats réels et de haute importance, mais non comme signifiant quelque chose par eux-mêmes, tant qu'ils sont affectés d'imaginarité. Ce n'est, je crois, que depuis le commencement de ce siècle qu'on a tenté de trouver à ces symboles une signification immédiate. Un émigré français, M. Buez, pendant la grande révolution, écrivit là-dessus quelque chose dans les mémoires de la Société Royale de Londres. En 1806, M. Argand publia un mémoire, à un petit nombre d'exemplaires. En 1814, M. Français, sans avoir connaissance des travaux de M. Argand, inséra un article dans le journal de M. Gergonne. Alors M. Argand se fit connaître à M. Français, et ces deux géomètres mirent l'un et l'autre des articles dans

le même journal de M. Gergonne. En 1828, M. Mourey publia un écrit intitulé *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires.*

Si j'essaie de mettre mon grain de sable à l'édifice mathématique, je suis bien éloigné de chercher à dérober ou à détourner à mon profit rien de ce qui appartient à ceux qui m'ont précédé. C'est pour cela que je les cite avec soin, afin qu'on puisse voir leurs travaux et ne me laisser que ce qui m'est dû. Je me permettrai seulement de dire que j'ai remis, en 1828, à M. Fourrier, secrétaire de l'Institut, avant la publication de l'ouvrage de M. Mourey, un petit manuscrit qui renfermait une partie des principes que j'expose dans ce premier mémoire. Je continuerai dans d'autres mémoires le développement de cette matière, si le public juge mes faibles travaux de quelque utilité pour la science.

TABLE.

—

ESSAI

SUR LA THÉORIE ET L'INTERPRÉTATION

DES

QUANTITÉS DITES IMAGINAIRES.

PREMIER MÉMOIRE.

---

1 Avant Descartes on abandonnait les quantités négatives, en les regardant comme des symboles d'absurdité, de la même manière qu'on regarde maintenant les quantités dites *imaginaires*. Nous pouvons dire qu'on avait raison : en effet, un marchand qui en résolvant un problème posé pour calculer son gain trouve du négatif, est dans l'absurde, il veut trouver ce qui n'existe pas, car il n'y a pas dans ce cas de gain pour lui. Pour être dans le réel, en résolvant une question, il faut nécessairement que le résultat soit une grandeur *naturelle*, c'est-à-dire, située dans l'échelle des grandeurs existantes ou concevables, qui sont depuis zéro jusqu'à l'infini (positif). Si ce résultat est compliqué par quelque signe qui en altère la nature,

par le signe — par exemple, il n'appartient plus à l'échelle naturelle des grandeurs. La question traitée ne peut donc alors avoir de résultat, en d'autres termes, elle est absurde ou impossible, en entendant par question *absurde* une question qui consiste à chercher *un résultat qui n'existe pas.*

2. Malgré ce que nous venons de dire, on sait le parti qu'ont tiré des quantités négatives Descartes et ses successeurs, surtout en géométrie. Il serait à propos de voir si les *imaginaires* qui doivent aussi leur existence à des questions impossibles, ne pourraient pas s'interprêter et être utiles comme les quantités négatives?

3. Or, en examinant la chose de près, on trouve que les quantités imaginaires peuvent être représentées en géométrie tout aussi légitimement que les quantités négatives, et qu'elles complètent par leur représentation un grand tout géométrique dont le positif et le négatif ne sont que des cas particuliers : car on trouve que si le positif doit se prendre à droite (par exemple) et le négatif à gauche, l'imaginaire doit se prendre *tout autour* de l'origine, c'est-à-dire que l'imaginaire répond à *une direction quelconque* dont le positif et le négatif ne sont, comme nous avons dit, que *deux cas* particuliers. L'on comprend quelle étendue doit donner aux résultats une pareille interprétation, et pour le moment, et à mesure qu'on en étudiera davantage les conséquences! et combien doivent être *gênées* les théories mathématiques sans cette extension. Elles sont comme une machine où la moitié des rouages ne fonctionnerait pas. De là, peut-être, une partie de la répugnance qu'éprouvent les commançants pour ces sortes de questions. Nous allons essayer

de dire là-dessus, ou d'ajouter à ce qui a été dit, ce que nous pourrons, pour le développement de ce point de la science qui paraît si important.

4. Même la représentation dont nous venons de parler et qui a lieu sur un plan, n'est pas encore tout ce dont a besoin la géométrie. Car nous aurons de plus à parler des lignes qui *tournent en rayonnant autour d'un point dans l'espace*, comme celles qui tournent dans un même plan.

5. Pour démontrer ce qui regarde la construction des quantités imaginaires, nous devons employer des raisonnements *semblables à ceux qui servent pour les quantités négatives*, et dont il faut bien reconnaître l'*esprit*.

6. La règle donnée par les algébristes, quand on arrive à un résultat négatif $x = -$ R, par exemple, est de changer le signe de x dans l'équation du problème et de voir ensuite si quelque nouvel énoncé pourrait donner la nouvelle équation, et, dans ce cas, l'on *pourrait* prendre pour la valeur négative la grandeur R, dans le sens qu'on a eu en vue pour l'inconnue dans la seconde mise en équation. Ce second énoncé se trouve presque toujours. Mais nous pouvons *généraliser ce principe* :

7. Je suppose qu'en résolvant une question j'arrive à un résultat qui n'est pas *naturel* parce qu'il est affecté d'un signe qui en change la nature, comme *imaginarité,* ou signe négatif, ou autre modification inconnue. Il est clair que si avant d'entreprendre le calcul, on s'était attendu à cette modification du résultat, on aurait pu *obtenir un résultat naturel.* Il n'y aurait eu qu'à affecter l'inconnue x de ce signe ou modification en commençant

le calcul. Au lieu d'avoir à la fin du calcul $x =$ *grandeur* (*modifiée*), on aurait eu x (*modifié*) $=$ *grandeur* (*modifiée*). La modification peut se supprimer de part et d'autre, puisqu'elle est la même, et il vient $x =$ *grandeur*.

8. Cette grandeur, que j'appellerai encore R, se présentant alors naturellement, *est la réponse à la seconde équation*, c'est-à-dire à l'équation modifiée par le changement de x en x *modifié*.

Il faut ensuite voir s'il existe quelque nouvel énoncé dont l'équation modifiée soit la traduction ; et R serait la réponse à ce nouvel énoncé. Si alors le calculateur veut changer l'intention qu'il avait en posant le premier énoncé, pour celle du second, ou bien l'étendre de manière à comprendre le second; on pourra dire que le résultat *extraordinaire* obtenu d'abord, c'est-à-dire R modifié, est *une réponse* à la question. R, pris sans signe, exprime *la grandeur cherchée*, et le signe qui l'affecte avertit de *la manière dont elle doit être prise*, qui est le sens de l'intention du second énoncé.

9. Si par exemple $f(x) = 0$ a conduit à $x = -R$, on mettra $-x$ dans l'équation qui deviendra $f((-x)) = 0$ et l'on arrivera, en la résolvant, à $-x = -R$, d'où $x = R$. Si l'on avait obtenu $x = R\sqrt{-1}$, on mettra $x\sqrt{-1}$ dans l'équation et l'on aura $f((x\sqrt{-1})) = 0$ qui résolue donnera $x\sqrt{-1} = R\sqrt{-1}$, d'où $x = R$.

10. Si maintenant on trouvait un nouvel énoncé qui convînt à l'équation modifiée dans le cas de x négatif, ou bien dans le cas de x imaginaire, le résultat négatif, ou le résultat imaginaire serait une réponse à la question.

11. Or, pour le cas de x négatif, il suffit de prendre pour l'inconnue une grandeur en *sens opposé* de celle qu'on avait eu en vue dans la première mise en équation, pour arriver à l'équation modifiée, parce que la grandeur opposée fait soustraction là où l'autre faisait addition et *vice versâ* : car deux grandeurs sont dites opposées lorsqu'elles peuvent faire effet sur la même grandeur, l'une en l'augmentant, l'autre, en la diminuant. Le gain et la perte d'un marchand sont deux grandeurs opposées parce qu'elles font effet sur *l'avoir* du marchand, l'une en l'augmentant, l'autre en le diminuant. Aussi, la réponse — R dans le calcul du marchand, peut être prise pour de la perte, et être considérée comme une réponse à la question, en imaginant que le marchand a changé son intention et qu'il dit : je veux *chercher de la perte*, ou bien qu'il l'a étendue en disant je veux chercher *tout ce qui intéresse ma position*, gain ou perte.

12. Il n'est pourtant pas dit qu'on puisse toujours utiliser les résultats négatifs. Quelquefois la question est de nature à ce que l'inconnue n'ait pas ou n'admette pas d'opposée. Si, par exemple, pour déterminer la date d'un évènement, on avait entre les chiffres qui doivent exprimer cette date, une relation qui traduite en équation et résolue, mène à des valeurs négatives pour les chiffres, on ne pourrait tirer aucun parti de ce résultat, parce que les chiffres négatifs ne sont pas admis dans notre système de numération.

13. En géométrie, l'opposé d'une ligne allant à droite est une ligne allant à gauche (11), car la ligne allant à gauche diminue ce que la ligne allant à droite augmenterait.

14. Par aller à droite et à gauche, nous entendons que la ligne croît à partir d'une de ses extrémités, que nous appellerons *origine* de cette ligne, et va jusqu'à sa seconde extrémité, où elle s'arrête. Quand nous dirons l'extrémité d'une ligne, c'est de la *seconde* qu'il s'agira ou de son bout, par opposition à l'origine.

15. Donc, si en résolvant une question où l'inconnue est une ligne qu'on croit à droite d'une origine, et qu'on trouve un résultat négatif —R, si l'on avait eu l'intention de la chercher à gauche, on aurait trouvé +R. Donc on peut, *si l'on veut*, prendre —R pour une réponse à la question, en regardant R comme la longueur absolue de la ligne cherchée, et le signe — comme avertissant que c'est à gauche qu'elle doit être prise.

16. Une quantité négative vient toujours de ce qu'il y a eu une soustraction où la quantité à soustraire s'est trouvée plus grande que l'autre. Nous pouvons donc considérer un résultat négatif —R comme ayant été $(a - b)$ avant la réduction. Ce point de vue nous sera utile pour les résultats imaginaires.

17. Nous pouvons ne pas opérer cette réduction sur les nombres abstraits, mais faire une opération graphique qui nous mène au même résultat. Nous partirons de l'origine, nous parcourrons a à droite. De l'extrémité de a, comme origine de b, nous parcourrons b à gauche. Il est facile de voir que son extrémité tombera *là où serait tombée l'extrémité du résultat* si l'on avait fait la réduction avant la construction. Cette construction sert pour le résultat positif comme pour le résultat négatif.

18. Nous dirons en passant qu'il ne faut pas s'étonner

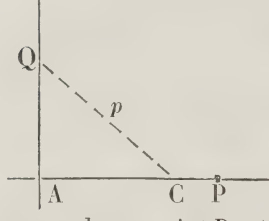
de ce qu'un résultat négatif, ou bien une soustraction où le nombre à soustraire est le plus grand, paraisse une chose absurde sur les nombres abstraits et que cela soit quelque chose de possible dans l'application. Cela vient de ce que dans les grandeurs concrètes, dans les distances géométriques, par exemple, l'origine de la grandeur est fixée *arbitrairement* et non *nécessairement*. Là où nous faisons commencer une ligne, n'est pas l'origine naturelle de l'existence, parce que ce point est *dans l'espace*: avant l'origine fixée il y a encore de la place. Il faudrait commencer à l'infini pour qu'il n'y en eût plus: tandis que dans les grandeurs abstraites, il n'y en a pas avant zéro, que l'on considère *comme l'origine de l'existence.*

19. Il est bon de remarquer toutes les manières dont cette construction peut se faire, par ce que cela pourrait nous être utile pour les imaginaires. Or, nous pouvons *commencer par* b comme nous avons (17) *commencé par* a: c'est-à-dire, parcourir b à gauche, et de son extrémité, a à droite: l'extrémité de a donnera le point, comme l'extrémité de b l'avait donné. Nous pouvons dire qu'après avoir posé deux règles, l'une à droite de l'origine, longue comme a, l'autre à gauche, longue comme b, nous traînons une des règles jusqu'à ce que son origine soit sur l'extrémité de l'autre, et l'extrémité de la règle qui s'est mue, donne le point cherché.

20. Nous dirons encore que si au lieu de lignes, il s'agissait de forces, disposées à droite et à gauche de l'origine, comme les lignes, la réduction se ferait *toute seule.* Une bille, frappée à la fois par deux coups opposés a et b, irait, au bout d'un temps donné, au même point où

elle serait allée en la frappant successivement. Remarque *importante*.

21. Venons aux quantités imaginaires. Tout résultat imaginaire $R\sqrt{-1}$ ou $\sqrt{-R^2}$ peut être censé, à la manière des quantités négatives (16), avoir été sous la forme $\sqrt{p^2-q^2}$. Gardons cette forme pour la construction. Tant que p est plus grand que q, nous savons construire, et cette construction a une analogie avec la construction de $a-b$ que nons devons remarquer. Pour construire $a-b$, suivant un des procédés observés (19), après avoir posé à droite de l'origine la longueur a, qu'on peut imaginer représentée par une règle matérielle, et avoir mis b à gauche, je fais mouvoir l'origine de a ou de la règle sur l'axe gauche, jusqu'à l'extrémité de b. L'extrémité de a donnera le point cherché.



Pour construire $\sqrt{p^2-q^2}$ (p étant plus grand que q) on sait par la propriété du triangle rectangle qu'on y arrive de la manière suivante : on prend p à droite de l'origine, il ira par exemple au point P, et q sur un axe vertical, ou des y, qui viendra par exemple au point Q. Maintenant on fait mouvoir l'origine de p (ou de la règle) sur q jusqu'à l'extrémité de q qui est au point Q. L'extrémité de la règle donnera le point cherché C sur l'axe horisontal.

Si q se trouve aussi grand que p, l'extrémité de la règle *vient à l'origine*, et l'on ne trouve pas de reste.

Si q est plus grand que p, on ne trouve aucun reste

sur l'axe horizontal ou des x. De plus ce manque de résultat de la nature cherchée ne se manifeste pas par zéro, mais par $R\sqrt{-1}$ analytiquement, et par une impossibilité de construction géométriquement.

Maintenant si quelque construction géométrique peut donner un résultat analytique réel, nous serons autorisés à prendre *le résultat géométrique comme la signification de l'expression imaginaire*, de même que la grandeur à gauche est prise pour la signification de l'expression négative. Or, si au lieu de chercher le résultat sur l'axe des x, on le cherche sur la perpendiculaire ou l'axe des y, en opérant avec p sur q comme on voulait opérer avec q sur p, c'est-à-dire, en faisant glisser l'origine A de q jusques à l'extrémité de p, on trouve un résultat sur l'axe vertical, c'est-à-dire, un résultat dont la direction est perpendiculaire au résultat qu'on croyait trouver. *Rien n'empêche de prendre* ce résulat comme une réponse à la question, non pas telle qu'elle était suivant la première intention, mais modifiée : au lieu de dire *je cherche un résultat horizontal,* on doit dire *je cherche un résultat vertical*, ou bien encore l'intention doit être étendue (8) en disant je cherche un résultat *horizontal ou vertical,* c'est-à-dire, sur le système ou la croix des axes.

22 Quelquefois on emploie ce qu'on appelle *le problème des courriers* pour démontrer ou confirmer la théorie des quantités négatives. C'est un problème où, à cause de sa simplicité, le calculateur peut voir sans calcul la nature du résultat. Or il y a un cas, celui où le courrier parti de plus loin irait moins vite, dans lequel on voit que le résultat doit être pris en sens contraire de l'intention pre-

mière. Alors on interroge le calcul qui répond par un *résultat négatif*, et l'on conclut que les résultats négatifs doivent être pris en sens contraire; ou bien si la démonstration de cette théorie a été donnée autrement, on regarde le problème des courriers comme une *vérification de la théorie*.

De même, soit une ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. On sait qu'elle a ses foyers ou son excentricité sur l'axe des x si a est plus grand que b, et sur l'axe de y si b est plus grand que a. Demandons au calcul cette excentricité en agissant comme pour la trouver sur l'axe des x, quand nous savons qu'elle est *sur l'axe des* y, ou perpendiculaire à la position que nous faignons devoir trouver. Le calcul répond par une *excentricité imaginaire*. En prenant l'imaginarité pour de la perpendicularité on n'a pas besoin de recommencer le calcul pour trouver les foyers, et l'intention du calculateur doit être : je cherche le foyer, qui peut se trouver *ou sur l'axe horizontal ou sur l'axe vertical*.

Grandeurs à partie réelle et à partie imaginaire.

23 Si l'on a une grandeur à partie réelle et à partie imaginaire, comme $a+b\sqrt{-1}$, a et b représentant des grandeurs positives, par exemple, la partie réelle se prendra à droite et la partie imaginaire en haut, à partir de l'extrémité de la partie réelle (17), et le point où arrivera l'extrémité de b pourra être regardé comme le point cherché. Mais il faut ici étendre l'intention encore plus que ci-dessus ; il faut se dire, je cherche un point qui peut être situé non seulement sur la croix des axes (21), mais encore sur *tout le plan*. De sorte que ces

deux grandeurs, de nature différente, et dont l'assimilation paraît impossible, donnent par leur réunion un résultat en géométrie. Cela vient de ce que la géométrie a des positions qui n'ont aussi rien de semblable entre elles: car que dire sur l'identité de nature d'une ligne et de sa perpendiculaire? Il y a comme l'on dit quelquefois un *abîme* entre ces deux natures. La réunion de ces deux sortes de lignes si hétérogènes, offre pourtant un résultat qui est quelque chose, savoir : *l'arrivée à un point cherché.*

24 La mécanique va nous donner quelque chose de plus intime, sur la combinaison des grandeurs réelles et des imaginaires. Deux grandeurs réelles rapprochées par addition (algébrique) ne restent jamais séparées, elles se réduisent en un seul résultat de même nature, ou positif ou négatif. Cela se fait par une opération analytique que nous savons faire et qui est l'addition ou la soustraction. Quant aux grandeurs réelles et imaginaires, comme $a+b\sqrt{-1}$, y aurait-il aussi moyen de ne pas les garder séparées, mais d'en faire un tout homogène? Laisons-nous diriger par la mécanique, qui déjà peut faire, comme nous savons (20), la réduction des grandeurs réelles. Que l'on applique deux forces sur l'axe horizontal à l'origine, ou toutes les deux positives, ou bien toutes les deux négatives, et imaginons que ces forces sont représentées par des droites, ou mieux encore considérons l'effet de ces forces : le chemin d'une bille fait dans un temps donné, par l'impulsion de ces forces. Le chemin de la bille nous donne le résultat de ces deux causes, que nous appelons *résultante*, et c'est la somme *algébrique* des grandeurs ou des lignes qui représentent les forces. De sorte que, lors même

que les forces ou les grandeurs ne seraient pas réunies, ou ne seraient pas de même nature, elles ne sont pas de même nature si l'une est positive et l'autre négative, elles ne sont pas réunies, si au lieu de donner un coup qui soit la somme (algébrique) des deux coups on donne les deux coups; hé bien dans ce cas, dis-je, la mécanique se charge pour ainsi dire de l'addition et nous donne, comme nous avons remarqué (20), le résultat, qui est la résultante des deux forces. Ce sont deux causes qui se fondent pour ainsi dire ensemble, pour ne donner qu'un résultat, parce qu'il ne peut pas y en avoir deux. Nous sommes donc autorisés à dire *somme mécanique* ou *somme statique* au lieu de *somme algébrique.*

La mécanique *fait donc l'addition de deux forces qui sont sur la même ligne,* c'est-à-dire, trouve *une troisième force qui produit le même effet que les deux composantes.* Mais elle fait aussi une espèce d'addition *de deux forces qui ne sont pas sur la même ligne,* elle trouve une troisième force qui fait le même effet que les deux premières prises avec leur grandeur et leur position : c'est, comme l'on sait, la *diagonale* du parallélogramme ou du rectangle des composantes, c'est-à-dire, qu'elle remplace par *un tout homogène* l'ensemble de deux grandeurs qui ne l'étaient pas.

25 Rien n'empêche en géométrie de remplacer $a+b\sqrt{-1}$ par la *diagonale* du rectangle ou l'hypoténuse du triangle rectangle dont a et b sont les côtés, car en suivant cette diagonale nous arrivons au même point. L'addition statique ou *composition des forces, répond donc à l'addition des imaginaires.* On peut par là, substituer un tout homogène à deux parties de natures différentes entre

elles. Le tout qui est homogène en lui-même ne l'est ni avec une partie ni avec l'autre. Il y a pour ainsi dire fusion des deux natures, comme des deux grandeurs absolues et rien ne demeure ce qu'il était.

26 D'après cela, l'extension à donner à l'intention du calculatenr peut être rendue ainsi: *je cherche un point situé à l'extrémité d'une droite partant de l'origine, et faisant un angle quelconque avec l'axe des x positifs.*

Si le résultat est tout réel et positif, l'angle à l'axe est zéro. Si le résultat est négatif, l'angle à l'axe est de deux droits. Si le résultat est tout imaginaire, l'angle à l'axe est un droit. Si le résultat est en partie réel et en partie imaginaire, l'angle à l'axe ou l'inclinaison a pour tangente trigonométrique la partie imaginaire divisée par la partie réelle, c'est-à-dire $\frac{b}{a}$, s'il s'agit du résultat $a+b\sqrt{-1}$.

C'est donc un résultat homogène, une ligne, qu'il faut avoir en vue, *en y faisant entrer l'idée d'inclinaison.*

27 Considérons encore les foyers de l'ellipse, ou comme *preuve* ou comme *vérification* de la manière de prendre les grandeurs à partie réelle et à partie imaginaire. La distance du sommet de l'ellipse au foyer est $a+\sqrt{a^2-b^2}$. Si b devient plus grand que a, le radical devient imaginaire, et en le prenant verticalement à la suite de a qui est horizontal, on arrive au foyer. Si le point de départ n'était pas au sommet, mais par exemple à un point de l'ellipse, il y aurait des considérations dans lesquelles nous entrerons plus tard.

Calcul des grandeurs imaginaires.

28 Une formule en nombres réels étant donnée, le calcul réduit cette formule en un seul tout ou résultat, en effectuant les opérations indiquées; et si l'on est convenu que ces nombres sont des lignes, le calul *trouve une ligne qui est le résultat final.* Si la formule est composée de grandeurs imaginaires, qui toutes sont réprésentées par des lignes avec leur inclinaison (26), le calcul aura pour objet de suivre les modifications qu'éprouvent ces lignes par le calcul et *d'arriver à la ligne finale qui représente le résultat de l'opération (tant en longueur qu'en direction).*

29 *Addition.* Nous avons vu (25) que l'addition de deux grandeurs, l'une imaginaire et l'autre réelle, comme a et $b\sqrt{-1}$, se fait par la statique, c'est-à-dire, par la diagonale du rectangle. Si l'on a un nombre quelconque de grandeurs imaginaires comme :

$$\begin{array}{l} a+b\sqrt{-1} \\ c+d\sqrt{-1} \\ p \\ e+f\sqrt{-1} \\ \quad q\sqrt{-1}, \end{array}$$

à additionner, ou plutôt à construire; on fera encore de même par la statique, c'est-à-dire, qu'on *composera ensemble toutes les parties réelles :* ce qui donnera une résultante sur l'axe des x dont la longueur sera $a+c+p+e$; ensuite *les parties imaginaires ensemble :* ce qui donnera une résultante $b+d+f+q$, sur l'axe des y, et *l'on tirera la diagonale.*

On pourrait encore composer a et $b\sqrt{-1}$ ensemble : ce qui donnerait déjà une résultante inclinée ; ensuite $c+d\sqrt{-1}$ donnerait aussi une résultante inclinée. On composerait ensuite ces deux résultantes ensemble *par le parallélogramme* des forces. Avec la résultante qu'on trouverait, on composerait une de celles qui restent, ainsi de suite. Le lecteur se démontrera facilement que ces deux manières de construire mènent au même résultat. D'ailleurs la statique le fait voir bien simplement, car on doit arriver à la même résultante de quelque manière que l'on compose.

Nous pouvons encore dire qu'on peut composer par le *polygone connu en statique*, que l'on forme en mettant *avec leurs inclinaisons, les forces ou lignes les unes à la suite des autres*, de manière toujours qu'à l'extrémité de la première soit l'origine de la seconde, à l'extrémité de la seconde soit l'origine de la troisième, ainsi de suite, et la résultante, ou le *résultat*, ou la *somme statique* de ces forces, ou de ces lignes, est la ligne qui irait de *l'origine de la première composante à l'extrémité de la dernière*, c'est-à-dire, qui fermerait le polygone en partant de l'origine. Ceci est la généralisation de l'article (25).

Quand on compose les parties réelles ensemble et les parties imaginaires ensemble, il est facile de voir qu'on suit l'esprit de ce dernier procédé, car on met bien les lignes *les unes à la suite des autres* avec leurs inclinaisons, qui sont nulles pour les unes, et un angle droit pour les autres.

30 La *Soustraction* revient à l'addition en changeant les signes.

31 On sent que les variations qu'éprouvent dans leur inclinaison les grandeurs imaginaires, par l'addition et les autres règles de l'arithmétique et en général par des combinaisons quelconques, peuvent faire tomber les résultats dans l'axe (des x), c'est-à-dire, donner du réel. Voilà pourquoi l'on dit que les quantités imaginaires quoique imaginaires ne doivent pas toujours être abandonnées: que souvent par des combinaisons on en tire des résultats réels. C'est prendre les *imaginaires au passage* à l'axe pendant leur mouvement; mais on peut les considérer pendant tout le cours de leurs variations.

32 *Multiplication.* Quand une grandeur imaginaire ou inclinée est multipliée par une autre, elle éprouve problamement une variation et dans sa longeur et dans sa direction. Nous pouvons donc dire qu'il y a deux règles, celle des *longueurs* et celle des *inclinaisons*. Or la règle des longueurs est *qu'elles se multiplient* et la règle des inclinaisons c'est que *les inclinaisons s'ajoutent.* Nous allons le voir tout en *profitant des théorèmes* analytiques connus sur ce point.

Pour cela considérons une droite inclinée, d'une seule unité de longueur. Son expression analytique sera une partie réelle et une partie imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, choisies de manière que leur hypoténuse, qui est la droite en question soit égale à l'unité. Mais alors *la partie réelle peut être considérée comme le cosinus et la partie imaginaire comme le sinus de l'inclinaison de cette ligne* qui est l'unité, c'est-à-dire, que l'unité, soit dans sa position, soit dans sa longueur, sera exprimée par

$$\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1},$$

en entendant par α l'inclinaison de cette unité linéaire, ou l'angle qu'elle fait avec l'axe des x (positifs). Prenons une seconde unité inclinée $\cos\beta + \sin\beta\sqrt{-1}$, pour en multiplier la première. On sait par la trigonométrie que le résultat sera :

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sqrt{-1}:$$

c'est-à-dire, que le produit n'a pas changé de longueur, il est toujours l'unité; mais cette unité a la somme des inclinaisons des facteurs.

Maintenant nous remarquons que tout nombre concret peut être considéré comme composé d'une unité concrète multipliée par un nombre abstrait. 15 francs peut être considéré comme 15 fois un *franc*. C'est alors la nature de l'unité qui donne la nature du nombre. Si au lieu d'un franc on met un sou, un mètre, etc., la nature du nombre change et le nombre abstrait demeure. De même une ligne inclinée, d'une longueur quelconque, $a+b\sqrt{-1}$, peut aussi être considérée comme une *unité linéaire inclinée multipliée par un nombre abstrait.* Cette droite inclinée est l'hypoténuse d'un triangle dont a et b sont les côtés. Il faut imaginer que le triangle se rapétisse en demeurant semblable à lui-même, de manière à ce que *l'hypoténuse devienne l'unité.* Pour cela il n'y a qu'à diviser et l'hypoténuse et les côtés par le même nombre, et ce nombre doit être le nombre abstrait qui marque la longeur de l'hypoténuse, savoir $\sqrt{a^2+b^2}$, puisque cette hypoténuse doit se réduire à l'unité linéaire. Dans le même temps les côtés du triangle se réduisent l'un au cosinus et l'autre au sinus de l'inclinaison. Si elle est α on aura $\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, une seule unité ayant l'inclinaison de la ligne totale.

Et en multipliant cette unité par le nombre abstrait $\sqrt{a^2+b^2}$, qui a fait la division, la ligne devient ce qu'elle etait. Donc $a+b\sqrt{-1}$ peut être mis sous la forme $p(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})$, en désignant par p, le nombre abstrait $\sqrt{a^2+b^2}$.

Le nombre abstrait p est souvent appelé *module*, par les géomètres, et ils appellent *réduite* la partie qui, suivant nous, représente l'unité inclinée.

Maintenant, qu'on nous propose deux droites inclinées $a+b\sqrt{-1}$ et $c+d\sqrt{-1}$, d'une longueur quelconque. Nous les réduirons respectivement aux formes

$$p(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1}) \quad \text{et} \quad q(\cos 6+\sin 6\sqrt{-1}).$$

Alors les nombres abstraits p et q, qui sont les longueurs des droites inclinées, se multiplient ensemble. Nous savons que l'unité du produit aura *les deux inclinaisons;* et la longueur aura *le produit des longueurs.*

33 La règle des signes de la multiplication algébrique est *un cas particulier de ceci* + par + donne +, + par — donne — etc. dit-on; ou bien + 1 par + 1 donne + 1, + 1 par — 1 donne — 1 etc. Nous pouvons regarder

$$(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1}),$$

qui affecte le nombre abstrait p, comme une espèce de signe avec l'unité, puisque c'est l'unité dans une certaine position, et +1 est aussi l'unité dans la position à droite, —1 l'unité dans la position à gauche. +1 c'est l'unité avec une inclinaison zéro. En multipliant +1 par +1 on doit trouver la somme des inclinaisons, c'est-à-dire, l'inclinaison zéro ou +1. —1 a une inclinaison de deux angles droits : multiplié par +1, qui n'a point d'inclinaison, il doit donner deux droits ou —1. Ensuite —1 par —1 doit donner les deux inclinaisons ou quatre droits, c'est-à-dire, revenir à l'axe à droite, ou à +1.

34 *Division.* Dans la division *les longueurs doivent se diviser*, et les *inclinaisons se soustraire*, par des raisons tirées de la multiplication.

35 Pour *l'élévation aux puissances*, il est facile de voir (en considérant des facteurs égaux), que la *longueur doit s'élever à la puissance* et *l'inclinaison se multiplier par l'exposant de la puissance.* Ainsi :
$(cos\alpha + sin\alpha\sqrt{-1})p)^m = (cos\alpha + sin\alpha\sqrt{-1})^m p^m = (cos\, m\alpha + sin\, m\alpha\sqrt{-1})p^m$.

En ne considérant que l'élévation de l'unité inclinée, on a $(cos\alpha + sin\alpha\sqrt{-1})^m = (cos\, m\alpha + sin\, m\alpha\sqrt{-1})$, comme l'on sait (par le théorème de Moivre).

36 Pour *l'extraction des racines* il est facile de voir par l'élévation, qu'on doit *extraire la racine de la longueur* et *diviser l'inclinaison par l'indice de la racine.*

37 D'après ces règles une formule en imaginaires ou lignes inclinées étant donnée, on pourra *trouver le résultat* : c'est-à-dire, trouver *en grandeur et en position, la droite qui représente le résultat de la formule.* On pourrait pour cette opération employer le mot *composer ou construire une formule.*

Variation des fonctions algébriques.

38. La variable x peut varier et dans sa *longueur* et dans son *inclinaison*, c'est-à-dire, que son extrémité peut parcourir le plan des $x\ y$. Nous allons voir les variations qu'éprouve une fonction (algébrique) de cette variable, ou bien ce que parcourt son extrémité.

Considérons d'abord un seul terme d'un polynome, ou une seule puissance de la variable, x^7 par exemple. Occu-

pons-nous d'abord de *l'inclinaison*. Pour cela ne mettons qu'une unité à la place de x, une *unité inclinée*. D'après ce qui précède (35), la fonction ou la septième puissance, sera l'unité avec une inclinaison sept fois plus grande que celle de la variable. Maintenant imaginons que cette variable ou unité inclinée de cinq ou six degrés, si l'on veut, à l'axe des x (positifs), tourne de manière que son angle d'inclinaison croisse. *L'angle d'inclinaison* de la puissance septième croît *sept fois plus vite*. Les inclinaisons que l'unité ou la variable a à parcourir, c'est depuis une inclinaison zéro (je veux dire un angle d'inclinaison), c'est-à-dire, depuis sa coïncidence avec l'axe des x (positifs), jusqu'à un tour, deux tours, jusqu'à une infinité de tours positifs, et jusqu'à une infinité de tours négatifs. *Il n'y a que deux manières de tourner*. Durant ce temps la fonction *parcourt la même échelle,* mais sept fois plus vite.

Nous voyons donc ici, ainsi que le disait Monge, comme un *spectacle mouvant* dans une figure de géométrie, où nous pouvons suivre de l'œil les variations simultanées de la variable et de la fonction. Arrêtons-nous un peu pour bien considérer les relations qu'il y a entre les *puissances* et les *racines de l'unité*.

39 L'*unité* inclinée élevée à une puissance ne donne *que l'unité*, mais inclinée autrement, sept fois plus inclinée, s'il s'agit d'une puissance septième. (Par sept fois plus inclinée j'entends ayant un angle d'inclinaison sept fois plus grand, ce qui est presque contraire au sens du langage ordinaire, mais c'est plus court). Ces unités, l'une racine et l'autre puissance, sont dans ce cas en partie réelle et en partie imaginaire l'une et l'autre, ce

qui est le cas général. Si l'on fait tourner l'unité racine, l'unité puissance tournant plus vite, elles peuvent se trouver ou l'une ou l'autre dans des positions *remarquables*. L'unité puissance, par exemple, tombera dans l'axe horizontal, c'est-à-dire, *deviendra réelle*, ou+1 ou—1, et l'unité racine n'y étant pas, cette unité réelle aura pour racine l'unité inclinée, ou en partie réelle et en partie imaginaire, ce qui est assez singulier. L'inverse *ne peut pas arriver*, s'il s'agit d'une puissance entière: parce que l'unité racine, pour tomber dans l'axe, a besoin d'avoir fait ou un demi-tour, ou deux, ou trois, etc., ce qui multiplié par un nombre entier, savoir le degré de la puissance, fait un *nombre entier de demi-tours* pour l'unité puissance, ce qui la fait *tomber dans l'axe.* L'unité puissance peut encore *coïncider* avec l'unité racine, c'est lorsqu'elle l'atteint après avoir fait le tour.

40 Si nous voulons aller de l'unité racine à l'unité puissance, il faut multiplier l'angle ou l'arc de la racine par l'exposant de la puissance, disons-nous. Pour revenir de la puissance à la racine il faut donc diviser l'arc par le dégré de la racine. Comme la *variation en tournant* a ceci de particulier que les nouveaux états *reviennent passer sur les premiers*, il y a des circonstances remarquables dues à ce fait. C'est que l'unité inclinée ou non inclinée a *autant de racines qu'il y a d'unités* dans l'indice de la racine. Pour fixer les idées, qu'il s'agisse de la racine quinzième de l'unité, inclinée par exemple de 15 degrés. Il est clair d'après ce qui précède que l'unité inclinée de 1 degré sera sa racine. Mais comme la propriété fondamentale de l'unité racine est de venir, après avoir tourné de 15 fois son inclinaison (propre), coïncider avec

l'unité puissance, on peut augmenter l'inclinaison un dégré de la racine, on peut l'augmenter, dis-je, d'un angle qui lui permette de se trouver en coïncidence avec la puissance après avoir tourné de 15 fois son inclinaison. Or cela arrivera si c'est d'un *quinzième* ou de *deux quinzièmes*, *ou de trois quinzièmes*, etc., de circonférence qu'on augmente ce degré ; parce que l'unité racine, après avoir fait quinze degrés, aura fait une circonférence ou deux ou trois de plus que ce qu'elle devait faire pour arriver à l'unité puissance, ce qui évidemment ne *l'empêche pas de s'y trouver*. Donc l'unité inclinée de 15 degrés a pour racine quinzième, ou 1 degré, ou 1 dégré $+ \frac{1}{15}$ de circonférence, ou 1 degré $+ \frac{2}{15}$ de circonférence etc. Et toutes ces racines sont bien *différentes* jusqu'à la quinzième; mais la seizième *retomberait dans la première* à cause du retour de la circonférence.

41 Dans le cas particulier où l'unité puissance est réelle, ou dans l'axe, les 15 unités racines, qu'on appelle alors *racines de l'unité* (*réelle*), sont placées ou inclinées *symétriquement* au-dessus et au-dessous du diamètre. Cela fait que leurs parties réelles sont les mêmes deux à deux et les parties imaginaires ne diffèrent que par le signe. On dit alors de ces racines qu'elles sont *conjuguées*: ce qui n'arrive pas si la *puissance elle-même est imaginaire (ou inclinée*) Mais il y a beaucoup de choses pour lesqu'elles nous devons renvoyer aux traités connus sur cette matière, en y ajoutant seulement la représentation géométrique.

42 La *multiplicité des racines* dont nous venons de parler, n'est pourtant pas vraie d'une manière aussi absolue qu'on pourrait le croire : elle ne l'est que *sous un*

certain point de vue. Sous un autre *la racine est unique* même pour un indice *incommensurable*, comme nous ferons voir plus tard.

43 Voilà pour les inclinaisons, *revenons aux longueurs* Il suffit de multiplier l'unitée inclinée, avons-nous dit (32), par le nombre abstrait ou module, pour avoir la ligne inclinée ou imaginaire. Nous pouvons faire varier ce nombre depuis zéro jusqu'à l'infini positif, et la ligne imaginaire croîtra de zéro jusqu'à l'infini, sans changer d'inclinaison. Imaginons maintenant qu'une ligne imaginaire ou inclinée est mise à la place de x dans x^7, par exemple. Si nous faisons tourner la ligne racine ou varier l'inclinaison à partir de l'inclinaison zéro ou de l'axe, nous savons que la ligne puissance part aussi de l'axe et tourne 7 fois plus vite que la racine. Pour la longueur imaginons que nous faisons tourner la racine par *stations infiniment voisines*, et que nous l'arrêtons un instant à chaque station, pour faire varier la longueur depuis zéro jusqu'à l'infini positif d'une manière *continue*. Nous savons que la ligne puissance fera aussi des stations infiniment voisines, et qu'à chaque station elle variera d'une manière continue, depuis zéro jusqu'à l'infini : parce que le coefficient abstrait de son unité est une puissance du coefficient de la variable. Donc, *pendant que l'extrémité de la variable parcourt le plan des xy, l'extrémité de la fonction ou de la puissance, le parcourt aussi.* Nous pouvons ramarquer que l'extrémité de la puissance le parcourt *plusieurs fois* pendant que l'extrémité de la variable ne le parcourt qu'une fois : car la puissance tournant sept fois plus vite, le parcourt donc sept fois pour une de la variable. Mais l'essentiel est qu'elles le *parcourent tout l'une et l'autre.*

44 Si le terme x^7 avait un coefficient réel ou imaginaire, comme il serait multiplié par ce coefficient, il faudrait à l'inclinaison de la puissance *ajouter celle du coefficient:* le point de départ de la puissance pour tourner ne serait plus l'axe, mais *à l'angle du coefficient* à partir de l'axe. Si ce coefficient est positif, il n'a pas d'inclinaison; s'il est négatif, il a deux droits; s'il est imaginaire, il a un angle, comme l'on sait. Pour la longueur, il faudrait multiplier *la longueur de la puissance par la longueur ou le module* de ce coefficient. On voit que le coefficient *n'apporte aucun dérangement essentiel.*

45 Nous voyons par là que nouspouvons faire aller l'extrémité de la puissance accompagnée ou non accompagnée d'un coefficient (quelconque) *partout où nous voudrons,* ce qui signifie qu'une équation (en général imaginaire) à deux termes

$$x^m + (a + b\sqrt{-1}) = 0,$$

a toujours une racine. Elle en a même plusieurs et on les trouverait par les principes qui précédent. Elles sont en général imaginaires.

46 *Considérons un polynome.* Pour plus de simplicité, ne prenons d'abord que deux ou trois termes :

$$x^7 + x^8 + x^9,$$

par exemple, et sans coefficients. Que la variable x soit une ligne imaginaire ou inclinée; la puissance x^7 sera aussi en général, d'après ce qui précède (43), une droite inclinée; le terme x^8 en sera une autre, le terme x^9 une autre. C'est la somme statique ou *la résultante de ces trois lignes* qu'il nous faut. Hé bien! *après avoir obtenu les résultantes pour chaque terme, nous les composerons par le parallélogramme des forces* (29) (ou bien par un rec-

tangle, en composant les parties réelles ensemble et les parties imaginaires ensemble sur les axes).

Observons maintenant la variation de cette résultante pendant que l'extrémité de la variable parcourt le plan. Nous savons que quand x a pour inclinaison zéro ou est sur l'axe; x^7, x^8, x^9, y sont aussi. Donc dans ce cas les parallélogrammes de construction et la résultante *tombent dans l'axe.* Dans cette position faisons varier x en longueur, et d'une manière continue, sans changer de direction: en d'autres termes, faisons parcourir l'axe à l'extrémité de x, l'extrémité de la fonction ou de la résultante *le parcourra,* mais plus vite.

Faisons tourner x infiniment peu, et l'ayant arrêté, faisons parcourir à son extrémité, non l'axe, car x n'est plus dessus, mais le *rayon infini de sa direction.* Pendant que x varie sur son rayon (fixe) de direction, les trois puissances ci-dessus varient sur le leur; mais la résultante ne varie pas sur un rayon fixe, sur une droite. Elle varierait sur une droite si les trois composantes variaient proportionnellement, car les parallélogrammes de construction demeureraient semblables à eux-mêmes. Mais, comme ces termes sont à différentes puissances, les hautes puissances croissent plus vite que les basses, x^8 par exemple croît plus vite (dans le haut), que x^7; alors la diagonale ou résultante de x^7 et x^8, va *en se rapprochant de la direction de x^8;* car on sait que la résultante est plus rapprochée de la plus *grande composante.* Cette résultante composée avec x^9, donne une *résultante finale* qui va aussi en se rapprochant de la direction de x^9 quand x croît, par la raison que x^9 croît plus vite dans le haut que la première résultante trouvée; car on sait en algèbre que x^9 finirait par surpasser l'en-

semble ou la somme des termes inférieurs x^7+x^8. Mais la résultante ou la *somme statique* de ces termes est plus petite que leur somme absolue donc x^9 croît plus vite que cette résultante ; donc la résultante finale tourne en se rapprochant de x^9.

47 On peut remarquer que le terme du plus *haut* degré finit par *donner sa direction* au polynôme, pour les grandes valeurs de x. Pour les petites *c'est le moins élevé;* comme l'on sait dans l'algèbre ordinaire, que ce sont aussi ces deux termes qui donnent le signe au polynôme : ce qui doit être car les signes sont *des cas particuliers des directions.*

48 Si l'on fait varier x en longueur d'une manière continue, sur une direction, il est visible que les parallélogrammes de construction varieront d'une manière continue ; l'extrémité de la résultante finale se *mouvra sur le plan d'une manière continue*, et engendrera une *courbe*, qui demeurera comprise *entre la direction de x^7 et de x^9.*

On peut déplacer la direction de x infiniment peu, et l'on aura pour cette seconde station une nouvelle courbe infiniment voisine de la première, ainsi de suite. De sorte que si, par ces déplacements de direction de x et ces variations de longueur, on fait parcourir à l'extrémité de x tout le plan, l'*extrémité de la résultante du polynôme l'aura parcouru* (même plus vite).

Ce que nous avons dit de trois termes, nous le dirons de *tous les termes* d'un polynôme.

Si les termes ont des coefficients, il n'y a de différence que dans le départ de l'inclinaison de chaque terme

comme il a été dit (44). Et cela n'empêche pas *la construction des parallélogrammes.*

Nous voyons donc que *x parcourant de son extrémité, tout le plan*, qui forme le champ de ses variations, la résultante du polynôme (à coefficients réels ou imaginaires), dont il est la variable, *le parcourt aussi.*

49. Nous tirons de là, ou pour mieux dire, nous y voyons comme dans un tableau, que *toute équation ou polynôme a une racine.* En effet, considérons le terme constant, il aura sur le plan de variation une certaine position. Pour que x soit racine, il suffit qu'il mette, par sa variation, la résultante des autres termes du polynôme en *opposition* ou en *équilibre* avec le terme constant; ce qui *est possible*, puisque x peut, comme nous avons vu (48), faire parcourir à l'extrémité de cette résultante tout le plan de variation.

50. Nous voyons encore que *si les coefficients sont réels,* y compris le terme constant, qui est un coefficient; quand le polynôme a une racine, *il a aussi sa conjuguée.* Car, dans ce cas, les coefficients sont dans l'axe (ou à droite ou à gauche); les lignes tournantes qui représentent les termes du polynôme, doivent alors partir (pour tourner), de l'axe, puisqu'elles doivent, par ce qui précède (44), partir de la position de la ligne qui représente le coefficient. La résultante des termes variables, pour se mettre en opposition avec le terme constant, doit tomber *dans l'axe*, parce que le terme constant y est, à cause de sa réalité. Le départ des composantes et l'arrivée de la résultante sont donc *symétriques à l'axe.* On aurait donc le même avantage à faire tourner x en bas qu'en haut, car il peut tourner en deux sens: c'est-à-dire, que

si, en faisant tourner x de 15 degrés en haut, par exemple, et lui donnant 7 mètres de longueur, on a amené la résultante à l'équilibre, qui a lieu dans l'axe; en faisant tourner de 15 degrés en bas et donnant 7 de longueur, on amènera aussi la résultante dans l'axe et elle sera *la même que quand on agissait par-dessus,* et cela, comme nous avons dit, à cause de la symétrie. On pourrait également arriver à ce même point en ne tournant *que dans un sens.* Or, 7 mètres de longueur, avec 15 degrés d'inclinaison en haut ou dans le sens positif, et la même longueur, avec 15 degrés d'inclinaison en bas ou dans le sens négatif, sont *deux expressions imaginaires conjuguées.* Si l'une est $a+b\sqrt{-1}$, l'autre est $a-b\sqrt{-1}$.

51. Nous voyons donc par là que *les racines imaginaires marchent par couples.* Par conséquent elles donnent lieu *à des facteurs du second degré, réels.* Ainsi, l'on peut dire que *tout polynôme à coefficients réels, est décomposable en facteurs réels du second degré.*

Cela n'est plus vrai, si les coefficients sont imaginaires: parce que les départs et arrivées n'étant plus symétriques à l'axe, en tournant x en dessous comme en dessus, on ne produira pas le même effet. Mais, il faut dire que j'entends des coefficients imaginaires *non ambigus*; c'est-à-dire qu'en écrivant $a+b\sqrt{-1}$, c'est un seul signe du radical que je considère.

52. Si l'on entend que les deux signes du radical agissent, et que le coefficient est $a \pm b\sqrt{-1}$, ce n'est plus une simple équation, il y en a alors deux; hé bien, dans ce cas, les *racines conjuguées reparaissent encore.* On le voit facilement par les départs des inclinaisons des

composantes, qui n'ont pas lieu à l'axe, mais à des distances symétriques, quand on considère les parties imaginaires des coefficients avec le signe $+$ et ensuite avec le signe $-$. Mais alors une racine et sa conjuguée n'appartiennent pas, à proprement parler, *à la même équation :* la seconde appartient à la seconde équation, qui a les *coefficients conjugués avec la première.*

Résolution de l'équation $1+x+x^2+\ldots\ldots+x^m=0$, *et d'autres.*

53. Pour rendre le discours plus sensible, nous raisonnerons sur des exemples, il sera facile ensuite de généraliser. Soit par exemple l'équation,

$$1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{15}=0,$$

c'est-à-dire, une équation du quinzième degré, dont les coefficients sont *l'unité*, et qui a *tous ses termes*, (la lacune n'étant que pour abréger) : il s'agit de trouver les racines. Or, je dis que *l'unité* inclinée d'un arc qui soit *le* 16me *de la circonférence*, ou d'une manière générale la $(m+1)^{\text{me}}$ partie, est racine de l'équation. En effet, que l'on imagine un cercle ayant l'unité pour rayon, et sa circonférence divisée en 16 parties égales, et marquées si l'on veut, pour bien fixer les idées. Maintenant considérons une unité inclinée de $\frac{1}{16}$ de circonférence, qui peut être exprimée par $\cos\frac{c}{16}+\sin\frac{c}{16}\sqrt{-1}$, en représentant la circonférence par c. Comme l'unité ne s'allonge pas dans l'élévation aux puissances, et que son inclinaison se multiplie par l'exposant, cette unité inclinée mise à la place de x dans l'équation proposée, donnera (35) pour le terme x, l'unité inclinée de $\frac{1}{16}$ de circonférence;

pour le terme x^2, l'unité inclinée de $\frac{2}{16}$; pour x^3, l'unité inclinée de $\frac{3}{16}$ etc., c'est-à-dire, que les 15 termes donneront 15 rayons disposés comme les rais d'une roue de voiture, éloignés l'un de l'autre d'un seizième de circonférence. Il faut 16 de ces rayons ou unités pour garnir tout le cercle. Mais il y a bien seize termes dans l'équation, en comptant l'unité qui répond à la puissance zéro de x.

Ces 16 lignes ou forces (25) ont pour *somme statique* ou pour *résultante zéro*, car elles sont évidemment en équilibre, attendu qu'elles sont égales et disposées symétriquement autour du centre ou de l'origine. Donc, *l'équation est satisfaite.* Donc, l'unité inclinée d'un 16me de circonférence *est racine.*

34. Cette équation n'a pas une seule racine, elle doit en avoir 15, comme l'on sait, puisqu'elle est du 15me degré. Nous allons voir que les autres sont l'unité *inclinée de 2, de 3, de 4, etc., arcs, comme celui de la première, ou 16mes de circonférence;* c'est-à-dire, que les 15 racines tombent aux *points marqués* sur la circonférence, à l'exception *du point de départ.* En effet, prenons une unité ayant pour inclinaison un certain nombre des petits arcs dans lesquels a été divisée la circonférence. Les 15 puissances de cette unité tomberont encore d'une manière symétrique autour du centre, c'est-à-dire, à des distances égales. En effet, les distances circulaires (ou angulaires) qui existent entre les puissances, non seulement consécutives, comme entre la septième et la huitième, entre la huitième et la neuvième, mais encore entre les puissances séparées par le même nombre d'unités, comme entre la

septième et la dixième, entre la dixième et la treizième, demeurent égales, puisqu'elles sont des multiples; mais deviennent plus grandes que dans le premier cas, un nombre de fois marqué par le nombre d'arcs qu'a l'unité racine que nous employons à former les puissances; en entendant que ces distances se mesurent d'une *manière absolue* sur la circonférence, c'est-à-dire, qu'elles sont le chemin fait par la puissance que l'on considère, et qui peut être plus grande qu'une ou plusieurs circonférences.

D'après cela, je dis que les *vraies distances* des lignes ou rayons qui se suivent dans la figure, sont égales, c'est-à-dire, que les *rais* ou *rayons* sont également *espacés*. En effet, les vraies distances peuvent bien n'être pas d'accord avec les distances absolues. Il est possible qu'en partant du rayon dû à la cinquième puissance, et cheminant sur la circonférence, je ne rencontre pas comme rayon voisin, le rayon dû à la sixième, mais peut-être le rayon dû à la neuvième, qui peut avoir fait le tour de la circonférence et enjambé le rayon dû à la cinquième, et être resté son plus près voisin. Mais, quand j'aurai dépassé ce second rayon dû à la neuvième puissance, le plus près voisin que je trouverai sera le rayon dû à la treizième puissance, et il sera à la même distance du second que le second l'était du premier, car la première de ces distances était ce dont dépassait une circonférence l'arc absolu qui existait entre la cinquième et la neuvième puissance. La seconde distance est ce dont surpasse une circonférence, l'arc absolu qui existe entre la neuvième et la treizième. Ces arcs absolus sont égaux, comme il a été remarqué ci-dessus; donc, les parties qui dépassent la

circonférence seront égales. On raisonnerait de même pour tout autre intervalle. Donc, les *intervalles sont tous égaux.*

Le commencement ou la fin ne font point exception à ce raisonnement. En effet, je puis dire : après la treizième puissance je trouverai la première. car, si on le conteste, je dirai la dix-septième ; or, elle coïncide avec la première tout comme quand il n'y avait qu'un tour, car il y a un nombre entier de tours, attendu que l'arc de la racine nouvelle est un multiple de la racine première qui faisait faire un tour juste.

55. On peut remarquer que les rayons obtenus de la seconde manière, c'est-à-dire, par plusieurs tours, ne peuvent pas être plus serrés que ceux que donne la première manière, parce que les puissances faisant des pas d'un nombre entier de petits arcs, ne peuvent tomber que sur des points marqués par la première racine. Il peut pourtant en tomber plusieurs au même point, et alors les vrais espaces entre les rayons deviennent plus grands, puisqu'il y a plusieurs rayons qui se sont joints, mais ces espaces sont *toujours égaux.* Cela arrive quand le nombre d'arcs primitifs que l'on prend, est diviseur du nombre qu'en renferme la circonférence, et les vrais intervalles deviennent égaux à l'arc de la racine employée. Si, dans le cas de 16, je prends 4 arcs ou parties, pour ma racine, les rayons ne se jettent que sur les divisions quadruples Si j'en prends deux, les rayons se jettent sur les divisions doubles. Si je prends huit arcs, les rayons se jetteront tous sur la division 8 et 16, c'est-à-dire, partageront la circonférence en deux parties égales.

56. L'arc 16, c'est-à-dire la circonférence entière, *ne peut fournir une racine*, car 16 étant diviseur de 16, les intervalles devraient être par ce qui précède (55), de 16 arcs, c'est-à-dire, que les rayons se jetteront tous sur le rayon de départ ou de la puissance zéro, et il ne pourrait pas y avoir équilibre. Même raisonnement pour 32, 48, 64, etc. L'arc zéro ne peut pas non plus donner une racine, car l'unité inclinée de zéro, donnerait toutes ses puissances inclinées de zéro, ou couchées dans le rayon de départ, et l'équilibre ne pourrait avoir lieu. Cela doit être, car l'unité inclinée de zéro, a la même position que l'unité inclinée de 16.

57. Les inclinaisons 17 parties, 18, 19, ou bien $16+1$, $16+2$, $16+3$, etc., donneraient aussi des racines, car les puissances de l'unité seraient ce qu'elles ont été pour les inclinaisons 1, 2, 3, etc., parties, avec une ou plusieurs circonférences de plus; ce qui les place de la même manière sur la circonférence : ces arcs $16+1$, $16+2$, $16+3$, etc., fournissent donc des racines. Mais ces racines ont la même position que celles que donnent les arcs 1, 2, 3, 4, etc. parties. On peut donc les regarder comme étant les mêmes, et dire que l'équation proposée a 15 racines seulement, c'est-à-dire, un nombre *égal à l'exposant de son degré;* et qu'elles sont données par la circonférence divisée en parties égales *par autant de points que peuvent en marquer les exposants de l'équation, (y compris l'exposant zéro)*, qui tous donnent une racine à l'exception *du point marqué zéro*.

58. Si les coefficients étaient *en progression* (géométrique), il est facile de voir que les racines ne seraient plus l'unité, mais *l'unité divisée par la raison de la*

progression. En effet, si la raison est r, $\frac{x}{r}$ fera le même effet dans l'équation que x, quand il n'y avait pas de coefficients.

Si r est réel et positif, par exemple 3, les anciennes racines, qui étaient des unités inclinées, seront $\frac{1}{3}$ d'unité et inclinées de la même manière. *Si* r *était imaginaire*, les racines dans leur inclinaison *reculeraient de l'inclinaison (positive) de* r.

Equations à coefficients périodiques.

59. L'équation que nous venons de résoudre n'est qu'un cas particulier des équations à *coefficients périodiques*, que nous pouvons également résoudre, comme $a + bx + cx^2 + ax^3 + bx^4 + cx^5 + ax^6 + bx^7 + cx^8 + ax^9 + bx^{10} + cx^{11} = 0$, par exemple.

Il y a 12 termes, nous prenons pour racine une unité inclinée d'un 12me de circonférence. Les 12 puissances de cette unité, (y compris la puissance zéro) considérées sans coefficient, se distribueront comme ci-dessus à égale distance sur la circonférence, et auront chacune l'unité en longueur. Que les coefficients agissent ensuite, ils les modifient, les allongent par exemple, de la même manière dans chaque période. De sorte que si l'on considère la résultante de chaque période, nous aurons autant de résultantes que de périodes : ces résultantes seront égales et symétriquement placées autour du centre. Donc, il y aura *équilibre*, ou l'équation sera satisfaite. Donc, *l'unité inclinée d'un* 12me *est racine*, comme précédemment.

Il serait facile de faire voir que ces résultantes

seraient encore également espacées en employant les racines données par 1, 2, 3, etc. parties, c'est-à-dire que *ces différents arcs fournissent les racines*, comme ci-dessus (54).

60. L'équation du numéro (53) n'est qu'un cas particulier de ceci, comme nous disions : la période n'y a que *la longueur d'un terme*.

61. L'unité inclinée d'une partie, de 2, de 3, etc., forme les racines de l'équation à coefficients périodiques, avons-nous dit, mais il y a pourtant des *exceptions*. L'unité ayant pour inclinaison un nombre de parties ou arcs primitifs, marqué par *le nombre des périodes, n'est pas racine*. Dans l'équation périodique ci-dessus où il y a 4 périodes, c'est l'inclinaison de 4 parties qui ne donne pas de racine. En effet, quand l'unité ou rayon tournant arrive à cette inclinaison, une période garnit la circonférence, c'est-à-dire, que les lignes que donnent ses termes, la partagent en parties égales. Dans le cas présent, c'est trois lignes qu'il y aura, symétriquement placées autour du centre, pour une période. Ces trois lignes auront une *résultante* parce que les coefficients a, b, c, qui les affectent et qui en règlent la *longueur*, sont quelconques. Les coefficients influeraient même sur la *direction*, s'ils étaient imaginaires. La seconde période garnira aussi la circonférence et donnera une résultante égale à celle de la première et *coïncidant* avec elle : ainsi des autres. Donc, il n'y aura pas équilibre : à moins qu'il n'arrive qu'une *période considérée seule*, soit en équilibre. Ce qui revient à dire qu'on ait $a + bx + cx^2 = 0$.

62. Cette égalité ou équilibre d'une période seule

pourrait avoir lieu par des conditions entre ses coefficients, sans que x quittât la valeur que nous disons devoir faire exception; cependant cela ne pourrait être qu'autant qu'il y aurait plus de trois termes à la période, car si l'on y fait attention, on verra que trois forces autour d'un point, et divisant la circonférence en *trois parties égales*, ne peuvent être en équilibre qu'autant qu'elles sont *égales* en longueur; ce qui rendrait les trois coefficients de la période égaux entre eux, et par conséquent tous ceux de l'équation totale, qui par là cesserait d'être à coefficients périodiques; ou bien la période se réduirait à un terme, et rentrerait dans l'article (53).

63. En général l'équation provenant d'une période, qui, dans le cas présent, est $a + bx + cx^2 = 0$, ne sera donc *pas satisfaite* par l'effet des coefficients. Ce sera donc x qui sera obligé de satisfaire à cette équation, et les *deux valeurs* qu'il prendra pour cela, car l'équation est du second degré, feront les deux racines qui nous manquaient dans notre équation totale, pour *égaler le degré* de la racine (qui est 11).

64. *Les racines provenant de l'équation d'une période, forment toujours le nombre juste des racines qui manquent à l'équation totale.* En effet, la racine manque (de pouvoir servir) toutes les fois qu'elle arrive à un nombre d'arcs égal au nombre de périodes une fois, deux fois, etc., en d'autres termes lorsqu'elle a autant d'arcs qu'il y a de *premiers* termes dans les périodes, quand elle en a autant qu'il y a de *premiers* et de *seconds* termes, quand elle en a autant qu'il y a de *premiers*, de *seconds* et de *troisièmes* termes dans les

périodes, ainsi de suite. Il semblerait donc que l'équation de la période devrait donner une racine par terme et elle en donne une de moins, comme l'on sait; mais *cela suffit*, car la racine qui répondrait au dernier terme de la période et qui lui manque, parce que son degré est plus bas d'une unité que le nombre de ses termes, n'est pas nécessaire dans l'équation totale, attendu que le degré de celle-ci est aussi plus bas d'une unité que le nombre de ses termes, et tous les termes des périodes donneraient tous les termes de l'équation.

Il résulte donc de tout ce qui précède qu'une équation à coefficients périodiques a pour racines des *unités* disposées régulièrement autour de l'origine, avec des *exceptions (régulières)*, qui sont *supplées par les racines* de l'équation (ordinaire) que donne *une période* égalée à zéro.

65. Une équation *ordinaire* peut être considérée comme une équation à coefficients périodiques, mais à *une seule période*. Les racines à *unité inclinée* manquent toutes, puisqu'il en manque un nombre égal au degré de la période (64). Pour les remplacer il faut prendre celles de l'équation de la période, c'est-à-dire, de *l'équation totale*.

66. Il est facile de voir que les raisonnements ci-dessus sont *vrais* pour des coefficients *quelconques*, c'est-à-dire, réels ou *imaginaires*.

67. Une équation à coefficients périodiques peut n'avoir pas tous ses termes, car il peut y avoir des zéros qui fassent partie de la période.

68. L'équation à deux termes $1 + x^n = 0$, résolue par

les géomètres, *est un cas particulier* de l'équation à coefficients périodiques. Soit pour fixer les idées le cas particulier $1 + x^7 = 0$. On peut considérer ceci comme une équation à deux périodes de sept termes chacune. La première a pour coefficients l'unité, ensuite six zéros (67). La seconde a aussi l'unité affectant x^7, ensuite six autres termes affectés de zéros, que l'on s'est dispensé d'écrire. De sorte que cette équation est du treizième degré, la voici :

$$(1+0x+0x^2+\ldots+0x^6)+(x^7+0x^8+0x^9+\ldots+0x^{13})=0.$$

Pour avoir les racines de cette équation, il faut, d'après ce qui précède, diviser la circonférence en 14 parties, parce qu'elle est du 13me degré, ce qui fait un nombre de parties *double* du nombre de *termes d'une période* ou du *degré* primitif. Il faut ensuite cheminer sur la circonférence; et comme il y a 2 périodes, toutes les fois qu'on arrivera à un nombre d'arcs multiple du nombre 2, la racine ne sera pas bonne. Ce sont donc les nombres impairs d'arcs qui donneront les bonnes racines. Il y en aura 7. Les 6 qui semblent manquer pour égaler 13 devront être données par la première période égalée à zéro (64). Mais ce n'est qu'en apparence que l'équation est du 13me degré, car ses six derniers termes sont *factices*. Nous avons donc toutes les racines qu'il faut. Aussi l'équation de la période qui est $1 + 0x + 0x^3 + \ldots\ldots ox^6 = 0$ et qui revient à $1 = 0$, ne donne-t-elle aucune valeur pour x.

Ce que nous venons de faire répond bien à la méthode connue, qui prescrit de partager la première moitié de la circonférence en 7 parties égales (en un nombre de par-

ties égal au degré), à ne tenir compte que des *divisions impaires*, que l'on *continue* sur l'autre moitié de la circonférence.

69. Quand l'équation binôme $1+x^n=0$, ou $1+x^7=0$, que nous venons de traiter, a *un coefficient*, comme $1+ax^n=0$; on peut la considérer comme une équation à coefficients en progression (58). Le terme ax^7 est censé le septième de ceux qui ont éprouvé la multiplication de la raison. La raison est donc $\sqrt[7]{a}$. Les racines seront donc (58) ce qu'elles étaient, mais divisées par cette raison, c'est-à-dire, *par la racine septième du coefficient.*

Equations à termes croisés (ou entrelacés).

70. Il y a des équations qui ne rentrent pas dans les classes que nous venons de traiter, et qui peuvent également être résolues. Ce sont des équations dont les termes ne semblent pas d'abord s'arranger symétriquement dans le cercle autour du centre, mais qui pourtant *s'y arrangent* par un certain *croisement* ou *entrelacement* des termes, ce qui peut exiger plus d'un tour.

Soit par exemple l'équation.

$$1+x+x^3+x^4+x^{17}=0.$$

Cette équation a cinq termes, mais comme il y a des lacunes entre les puissances, ces puissances ne s'arrangent pas symétriquement sur la circonférence avec un seul tour. Cependant si l'on prend pour base ou racine des termes une unité inclinée d'un cinquième de circonférence, (parce qu'il y a cinq termes existants dans l'équation), cette unité élevée aux puissances marquées par

les termes de l'équation, garnit au premier tour les cinq points de division de la circonférence, moins le point 2 parce qu'il n'y a pas de terme x^2. En continuant de tourner, les termes x^5, x^6, x^7, etc., ne donnent rien puisqu'ils n'existent pas, mais le terme x^{17} va donner le rayon qui manque, car x^{15} tomberait au point 0, x^{16} au point 1 et x^{17} tombe au point 2. Le cercle est donc garni de rayons également espacés, (comme une roue de voiture) : l'équation est donc satisfaite parce qu'il y a *équilibre*. Donc, cette équation a pour racine *l'unité inclinée d'un cinquième de circonférence*.

L'équation $1 + x + x^5 + x^{17} + x^{24} = 0$ aurait la même racine, car la roue se forme comme avec l'autre équation, car il reste au premier tour deux places vides, la 2me et la 4me. Le terme x^{17} remplit la place 2 au quatrième tour, et le terme x^{24} remplit la place 4 au cinquième tour.

71. Il s'agit de voir ce que sont les autres racines de ces équations, de la première, par exemple, il doit y en avoir 17, puisqu'elle est du dix-septième degré : or, elle en a quatre en unités inclinées et données par les arcs 1 cinquième de circonférence, 2 cinquièmes, 3 cinquièmes, 4 cinquièmes, c'est-à-dire les mêmes que celles de l'équation $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$. En effet, avec la racine inclinée d'un cinquième, les termes de l'équation proposée qui est du 17me degré garnissent la circonférence à cinq divisions (70), comme ceux de l'équation sans lacune $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$. Nous savons (54) que dans cette dernière, quand on prend les arcs 2 cinquièmes, 3 cinquièmes, 4 cinquièmes, les résultats des termes se placent sur la circonférence, con-

venablement pour l'équilibre. Hé bien, 2 cinquièmes, 3 cinquièmes, etc., font le même effet sur l'équation du 17me degré que sur celle du quatrième, c'est-à-dire, qu'ils font tomber les termes aux mêmes points. En effet, les termes qui, pour se placer, faisaient plus d'un tour, comme x^{17}, qui en faisait trois et ne se plaçait que durant le quatrième, et faisait l'effet pour la place, d'une puissance du premier tour, ces termes, dis-je, peuvent être considérés même pour les racines à 2, 3, etc. cinquièmes d'inclinaison, comme des puissances du premier tour, car avec les racines à 2, 3, etc., cinquièmes, ils feront un nombre de tours entiers double, triple, etc., de ce qu'ils faisaient avec la racine à 1 cinquième, et ces tours entiers n'influent pas sur les places. Donc, les choses se passent de même que si les termes n'étaient qu'à un seul tour, comme dans l'équation

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0:$$

c'est-à-dire, que les racines venant de 2 cinquièmes, 3 cinquièmes, 4 cinquièmes de circonférence, qui sont les racines de l'équation (sans lacune) du quatrième degré, sont *bonnes aussi* dans la proposée du dix-septième.

72. Il suit de là que le polynôme $1 + x + x^3 + x^4 + x^{17}$ est divisible par $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Le quotient sera du 13me degré. Egalé à zéro, il *devra donner les* 13 *racines qui manquent* à 4 pour faire 17. Si l'on fait la division on trouvera que ce quotient est $1 - x^2 + x^3 - x^7 + x^8 - x^{12} + x^{13}$.

73. Nous pouvons résumer et *généraliser* en disant : si une équation dont les coefficients sont l'unité, est telle que ses termes, eu égard à leur degré, puissent, par un ou plusieurs tours, se placer à *égale distance*

sur une circonférence, cette équation aura les mêmes racines que celle qui *ne ferait qu'un tour* (et qui sont (54) des rayons (unités) menés à tous les points de division de la circonférence, excepté au point zéro). Par conséquent cette équation est susceptible d'abaissement, car elle est décomposable en deux facteurs, attendu que son premier membre est divisible par le premier membre de celle qui ne fait qu'un tour.

74. Si les coefficients au lieu d'être l'unité sont des grandeurs quelconques, *même imaginaires,* mais tels que par un ou plusieurs tours, les termes produisent sur un cercle, non l'effet d'une basse équation à termes sans coefficients, mais *à coefficients périodiques* (59), les conséquences seront encore les mêmes, c'est-à-dire, que la proposée aura *toutes les racines de la basse équation à coefficients périodiques,* qu'elle sera par conséquent susceptible *d'abaissement* comme ci-dessus; en d'autres termes, son premier membre sera *divisible* par le premier membre de l'équation à coefficients périodiques, qui lui répond. Il est entendu que l'opération de cette division doit être faite d'après le procédé *étendu au cas où il y a des termes imaginaires.*

75. Soit l'équation

$$\begin{gathered}1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7\\ +8x^8+8x^9+8x^{10}+8x^{11}\\ +7x^{12}+6x^{13}+5x^{14}+4x^{15}+3x^{16}+2x^{17}+x^{18}=0.\end{gathered}$$

Si on l'enroule sur une circonférence ayant 8 points de division, c'est-à-dire, autant de points qu'il y a de coefficients croissants, il est facile de voir que la somme des coefficients de chaque point de division sera la même, à cause des compensations des accroissements et des

diminutions: cette somme sera 12 à chaque point. Il y aura donc symétrie, par conséquent équilibre pour l'unité inclinée de $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$...... $\frac{7}{8}$ de circonférence. Nous aurons donc 7 racines de cette équation, qui doit en avoir 18.

Mais il est encore facile de voir que ce même polynôme peut s'enrouler sur une circonférence ayant 12 points de division et donner pour chaque point de division une somme de coefficients constante, qui sera 8. L'équation aura pour racines l'unité inclinée de $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$.........$\frac{11}{12}$, ce qui fait 11 autres racines, qui avec les 7 déjà obtenues feront les 18 racines de l'équation.

Cette équation du 18me degré a donc les racines des deux équations

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7=0,$$

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}=0.$$

Elle doit donc être *leur produit*. Elle l'est en effet.

76. Dans les équations ci-dessus à termes croisés, nous avons supposé tacitement que le croisement des termes et leur remplacement venait uniquement des exposants, et non des coefficients, ce qui revient à dire qu'une puissance qui remplace une puissance manquante a le coefficient que devrait avoir la puissance manquante, si elle y était, ou pour produire l'égalité de division sur le cercle, ou une division périodique. Si cela n'est pas, la proposée aura des racines *appartenant* à la basse équation qui ferait le tour du cercle, mais pourra ne pas les *avoir toutes*.

Soit l'équation

$$1+x-x^2+x^3+x^4+x^8=0.$$

Cette équation peut s'enrouler sur le cercle à six divi-

sions, car le terme $-x^2$ ou $-1\times x^2$, tournera par l'effet de son coefficient, d'une demi-circonférence et ira remplacer x^5 qui manque. x^8 viendra à la place de x^2 et la circonférence sera garnie, comme elle le serait par l'équation $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=0$. L'unité inclinée *d'un sixième* de circonférence sera donc racine. Pourtant il *n'est pas dit* que deux sixièmes, trois sixièmes, etc. donnent des racines.— x^2 de l'équation proposée a remplacé x^5 de la basse équation : mais c'est en partie par l'effet de son coefficient. Quand on prendra un arc double, triple, etc., les termes feront deux fois, trois fois plus de chemin sur la circonférence, ce qui ne les empêche pas, ainsi qu'il a été remarqué (71), de tomber en coïncidence avec les termes de la basse équation. Cependant si leur premier chemin est dû en partie au coefficient, ils ne feront plus *le même chemin* parce que l'accroissement de l'arc ne fait croître que le chemin dû à l'exposant et *non celui qui est dû au coefficient*. Le terme $-1\times x^2$ qui a déjà fait cinq sixièmes de circonférence, n'en aura pas fait dix pour l'arc double, parce que deux sixièmes seulement sont dus à son exposant, et les trois autres à son coefficient -1. Il n'y aura que les deux sixièmes venant de l'exposant qui seront doublés, ce qui fera sept. Il ne pourra donc pas faire le même effet que x^5.

Cependant $-x^2$ pourrait encore se trouver en coïncidence avec x^5 pour *certains arcs*, et alors ces arcs donneraient de *bonnes racines*. Pour qu'ils se retrouvent en coïncidence il faut que celui qui tourne plus vite, savoir x^5, ait fait un tour de plus que $-x^2$. On peut imaginer l'exposant de x^5 partagé en deux parties comme x^{2+3}. En doublant, triplant le chemin de la

racine, la partie 2 de l'exposant ferait aller x^{2+3} comme $-x^2$. Il faut donc que ce soit la partie 3 qui fasse faire un tour de plus. Or, à chaque arc ou sixième de circonférence que parcourt la racine, la partie 3 fait parcourir 3 sixièmes. Il faudra donc deux pas à la racine pour que la partie 3 fasse faire un tour de plus à x^5 qu'à x^2. La racine à été bonne à $\frac{1}{6}$, elle le sera à $\frac{3}{6}$, à $\frac{5}{6}$: ce qui fera trois bonnes racines. Si nous connaissions un polynôme qui eût ces trois racines, il diviserait le premier membre de la proposée. Or, d'après ce qui précède (68), l'équation $1+x^3=0$ les a. Donc, $1+x^3$ doit diviser le premier membre de la proposée $1+x-x^2+x^3+x^4+x^8$. Il le divise en effet et le quotient est $1+x-x^2+x^5$.

77. Soit encore l'équation

$$1+x+x^2+x^4+x^5+x^7+x^9\sqrt{-1}+x^{14}=0.$$

Il y a huit termes. La basse équation à huit termes qui garnirait le cercle à huit divisions, manque du terme x^3, remplacé par $x^9\sqrt{-1}$. Celui-ci par son exposant arriverait au neuvième point de division, c'est-à-dire, au premier . mais par son coefficient $1\sqrt{-1}$ il fait encore un quart de tour, ou deux arcs et arrive au point 3. Le terme x^6 manque aussi, mais il est remplacé par x^{14}.

Le terme x^{14} remplaçant le terme x^6 immédiatement n'empêchera aucune racine de la basse équation d'être bonne pour la proposée. Le terme $x^9\sqrt{-1}$ n'est pas de même, il remplace x^3, est en coïncidence avec lui pour la *première* racine, avec *l'aide* de son coefficient, qui lui fait faire deux arcs de plus qu'il ne ferait par son exposant. Mais, pour la *seconde* racine il n'y aura pas

coïncidence entre x^3 et $x^9\sqrt{-1}$, il manquera deux arcs à $x^9\sqrt{-1}$ à cause des deux arcs de son coefficient qui ne sont pas doublés quand l'inclinaison de la racine double. Pour la troisième racine, il lui manquera deux fois *ce qui est dû* à son coefficient ou quatre arcs, etc. Il faut alors faire tourner la racine jusqu'à ce qu'il manque à ce terme une *circonférence juste*, ce qui le remettra en coïncidence. Or, c'est à la cinquième racine, (ou 1 + 4), que cela arrivera. La cinquième racine sera donc bonne. Il n'y en aura plus car il faudrait encore faire quatre pas, ce qui nous mènerait à la racine neuvième, qui retombe dans la première.

Le polynôme proposé sera donc divisible par le polynôme du second degré qui aurait les deux racines que nous disons être bonnes, ce polynôme est $-\sqrt{-1}+x^2$. Le quotient est $\sqrt{-1}+x\sqrt{-1}+x^2(1+\sqrt{-1})+x^3+x^4-x^6\sqrt{-1}+x^7\sqrt{-1}-x^8+x^{10}\sqrt{-1}+x^{14}$.

Pour trouver le polynôme diviseur on peut multiplier ensemble les deux binomes donnés par les bonnes racines et qui sont

$$x-\left(\cos\frac{1}{8}+\sin\frac{1}{8}\sqrt{-1}\right) \text{ de circonférence,}$$

et $$x-\left(\cos\frac{5}{8}+\sin\frac{5}{8}\sqrt{-1}\right),$$

et faire les réductions convenables.

78. Nous pouvons généraliser et dire : si deux termes se remplacent sans intermédiaire de coefficient, toutes les racines de la basse équation sont *bonnes pour la grande*. Si le remplacement est *aidé par un coefficient*, il faudra faire sur les racines de la basse équation pour en retrouver une qui serve à la haute, *autant de pas*

que le coefficient aurait à en faire pour *parcourir la circonférence..*

Si les deux termes avaient chacun un coefficient, c'est de leur différence (circulaire) que nous dirions ce que nous disons d'un seul.

S'il y a plus d'une paire de termes remplacés, il est clair qu'il faut que les deux paires s'accordent sur la bonté de la racine.

Un signe — réduit le nombre des racines à la *moitié,* parce qu'en deux fois il fait le tour de la circonférence. Le signe $\sqrt{-1}$ le réduit au *quart*, parce que c'est en quatre fois qu'il fait le tour. C'est ce qui est arrivé dans les deux exemples précédents.

79. L'équation à deux termes $-1+x^n$ où le terme constant est négatif, est un *cas particulier* des équations à termes croisés. Mais il y a une *remarque* à faire. Le terme x^n remplace le terme $+1$ sans intermédiaire de coefficient. Ce remplacement n'empêche donc pas les racines d'être bonnes. Le terme -1 qui semble aller remplacer, puisqu'il se déplace, ne remplace rien, ou bien remplace le terme $ox^{\frac{n}{2}}$. Comme ce terme est nul, peu importe sa coïncidence avec -1. Donc, les n *racines doivent être bonnes.*

Revenons à la composition des équations qui doivent diviser et dont on a les racines.

Composition des équations dont les racines sont des unités également espacées.

80. Dans l'exemple de l'article (77) le polynôme diviseur est $-\sqrt{-1}+x^2$, disons-nous. Il ne ne faut pas être

étonné de ce que le terme constant de ce polynôme du second degré est imaginaire. Ses deux racines ne sont pas symétriques à l'axe ou *conjuguées,* et nous avons vu (51) que la réalité des coefficients est liée avec cette symétrie.

Mais elles sont *symétriques au centre,* circonstance qui donne lieu à une *relation remarquable*, et que voici : *Toute équation dont les racines sont égales de longueur à l'unité* (et même à un autre nombre), *et distribuées à égale distance sur la circonférence, est nécessairement à deux termes.* Son terme constant est *réel*, si les racines sont symétriques à *l'axe*, en même temps qu'elles le sont au *centre* ou également espacées; et il est *imaginaire* s'il n'y a que cette *dernière* condition. Tout cela s'accorde avec les équations à deux termes dont nous avons déjà parlé, Nous n'avons trouvé en effet que des racines égales et également espacées dans ces sortes d'équations.

Si cela est, la composition des basses équations qui doivent diviser les autres, est facile à faire, parce que l'on n'a à s'occuper que du *terme constant ;* si les autres, à l'exception du plus haut, ne doivent pas exister. Le terme constant est, comme l'on sait, le *produit des racines* pris tel que la multiplication le donne, si le degré de l'équation est *pair ,* et avec un signe *contraire* si le degré est *impair.* Ci-dessus (77) nous pouvons donc, au lieu de multiplier les deux binomes pour composer le polynôme du second degré qui doit diviser, ne faire que *multiplier les racines* pour composer le terme constant de l'équation. Cette multiplication est facile , car une racine

$$\cos\frac{1}{8} + \sin\frac{1}{8}\sqrt{-1}$$

est l'unité inclinée d'un huitième de circonférence , l'au-

tre de cinq huitièmes. Pour multiplier il faut ajouter les arcs, ce qui donne l'unité inclinée de six huitièmes ou de trois quarts de circonférence et peut s'écrire $-\sqrt{-1}$; ce qui est le terme constant de notre équation

$$-\sqrt{-1}+x^2=0.$$

Dans l'exemple de l'article (76) nous avions à composer l'équation dont les racines étaient l'unité inclinée d'un sixième, de trois sixièmes, de cinq sixièmes. Nous avons posé cette équation sans la composer, parce que nous pouvions la connaître d'après ce qui précédait. Si nous voulons la composer par la règle actuelle, le produit des racines sera l'unité avec la somme des inclinaisons ou $\frac{9}{6}$, ce qui revient à -1. L'équation étant de degré impair, changeons le signe; et il vient $1+x^5=0$, comme nous avions.

Démontrons donc le théorème dont il s'agit : savoir, qu'une équation dont les racines sont des unités également espacées sur le cercle, *manque de tous ses termes moyens*.

Les coefficients d'une équation sont la somme des produits des racines combinées, ou deux à deux, ou trois à trois, etc., suivant le terme dont il s'agit, (avec un signe convenable). Considérons, par exemple, le coefficient qui est la somme des produits des racines prises *trois à trois*, dans une équation qui a, si l'on veut, quinze racines. Prenons sur ces quinze racines une combinaison quelconque de trois racines, par exemple, la cinquième, la septième et la douzième. Ces trois racines en se multipliant donnent un résultat *unitaire*, je veux dire ayant l'unité en longueur, avec la somme des inclinaisons des facteurs. Si cette combinaison avance *d'un pas*, c'est-

à-dire, si la combinaison qui se compose maintenant des racines cinquième, septième, douzième, en avançant sans se *déformer*, je veux dire en conservant la même distance entre ses éléments, vient à se composer des racines sixième, huitième, treizième, le produit fait *trois pas* sur la circonférence; parce qu'il a (32) la somme des inclinaisons des facteurs qui en ont fait chacun un. Si la combinaison était de *quatre* racines, le produit irait *quatre fois* plus vite que la combinaison. En résumé, *si une combinaison se meut sur la circonférence, le résultat se meut autant de fois plus vite qu'il y a de racines dans cette combinaison.*

La régularité de cette marche *n'est pas interrompue* quand une des racines de la combinaison mobile atteint l'extrémité de l'échelle des racines. En effet, la combinaison avançant sur le cercle, sa racine la plus avancée qui est la douzième ou qui atteint au point 12, atteindra successivement aux points 13, 14, 15, 1, 2, 3, etc. Ce facteur perd une circonférence en passant du point considéré comme 15 à ce même point, considéré comme point zéro. Le produit perd par conséquent aussi une circonférence, ce qui évidemment ne dérange pas (pour la position) la *continuité* de son mouvement circulaire, car le même point sert de *commencement et de fin* à la partie perdue. Si la combinaison ou le système des trois racines allait en arrière, c'est une circonférence que *gagnerait* le produit, quand une racine atteindrait la division zéro ou 15, et le ressaut ne serait pas non plus senti. Quand une combinaison se meut sur la circonférence, les résultats ou produits marchent donc trois fois plus vite et d'une manière régulière. Ils feront donc trois tours

pour un, à pas égaux. Mais nous avons vu (54) qu'une pareille distribution produit l'équilibre ou une *somme mécanique zéro*. Une seconde combinaison donnerait de même une somme égale à zéro. Mais l'ensemble des combinaisons peut être considéré comme composé *des stations de toutes les combinaisons mobiles qu'on peut former*. Puisque chaque combinaison mobile donne zéro pour la somme de ses stations ; toutes ensemble, les combinaisons mobiles , *donneront zéro pour la somme totale des combinaisons à trois racines*. On peut faire le même raisonnement pour chaque coefficient. *Donc tous les coefficients sont zéro*.

Le coefficient du terme constant fait exception. Car la combinaison prenant toutes les racines, ne peut pas se mouvoir et donne donc un résultat *unique* qui *ne saurait être en équilibre*.

Donc l'équation *n'a que ses termes extrêmes*, ainsi que nous l'avons annoncé.

81. Le produit de toutes les racines ou le terme constant, est en général l'unité, puisque c'est le produit de facteurs *unitaires*. Mais il peut être réel ou imaginaire, et cette circonstance est liée *à la manière dont les racines de l'équation sont posées sur le cercle*. Nous savons bien qu'elles sont également espacées ; mais elles peuvent varier de position relativement aux divisions du cercle.

Le terme constant est *réel* quand l'*arc qui fait l'intervalle des racines* ou sa *moitié*, part du point *zéro* des divisions du cercle. Il est -1 quand c'est *l'origine* de l'arc qui est au point zéro, il est $+1$ quand c'est le *milieu*. En effet, ce terme constant a d'abord pour incli-

naison, la somme des inclinaisons des racines. Pour généraliser supposons leur nombre n, leurs inclinaisons forment une progression arithmétique. Pour avoir leur somme il suffit de *sommer* la progression. Il y a n termes, le premier terme est $\frac{1}{n}$ de circonférence, pour le cas où l'arc entier commence à zéro, et le dernier et $\frac{n}{n}$. La somme des termes de cette progression est $\frac{(n+1)n}{2n}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$ de circonférence. Si le nombre des racines, ou le degré de l'équation est pair, la partie $\frac{n}{2}$ de l'inclinaison devient un nombre entier de circonférences, peut par conséquent être omise, et il reste $\frac{1}{2}$ de circonférence pour l'inclinaison du produit des racines, c'est-à-dire -1. Comme le degré de l'équation est pair, ce produit sert de terme constant tel qu'il est. Si le degré de l'équation, ou le nombre des racines est impair, la partie $\frac{n}{2}$ devient un nombre entier de circonférences qu'on peut négliger, plus une demi-circonférence qui ajoutée à la seconde partie $\frac{1}{2}$ donne une circonférence entière qu'on peut négliger. Le produit sera donc l'unité avec une inclinaison zéro, ou $+1$. Mais comme le degré de l'équation est impair, ce produit doit changer de signe pour servir de terme constant. Donc *le terme constant est toujours* -1 *quand l'origine du premier arc est à la division zéro de la circonférence*, ainsi que nous l'avons annoncé.

Si c'est la moitié de l'arc qui part de zéro, le premier terme de la progression sera $\frac{1}{2n}$ et le dernier $\frac{2n-1}{2n}$. On pourra en la sommant et raisonnant comme ci-dessus prouver que le terme constant sera toujours $+1$. Mais

nous allons y arriver par une considération géométrique, qui rendra peut-être la chose plus sensible et qui d'ailleurs nous sera utile.

82. Nous savons donc que quand les racines coïncident avec les divisions du cercle, le terme constant est -1, en d'autres termes, l'unité inclinée d'une demi-circonférence. Si le *système des racines* tourne sur le cercle regardé comme immobile, que par conséquent l'inclinaison de la première racine croisse ou diminue, l'inclinaison du produit des racines tournera plus vite que le système, *autant de fois qu'il y a de racines*: car l'inclinaison de chaque racine, par le mouvement du système éprouve la même augmentation que l'inclinaison de la première, puisque les racines commencent toutes au même point qui est zéro du cercle. Cela revient à dire que le produit des racines *parcourt la circonférence, pendant que le système parcourt un arc* (ou distance des racines). Si le système avance d'un demi-arc à partir de la coïncidence, le produit, par conséquent le terme constant, tourne d'une demi-circonférence; et comme à la coïncidence du système, le terme constant était -1 il devient $+1$, comme nous l'avions annoncé.

83. Si le système fait $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ etc. d'arc, le terme constant fera $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ etc. de circonférence. En ajoutant toujours cela à une demi-circonférence, qu'il a à la coïncidence, on aura *l'inclinaison de ce terme constant.*

84. Qu'il s'agisse, par exemple, de l'équation à 15 racines. Si le système est en coïncidence avec les divisions du cercle, le terme constant est -1, ou l'unité

inclinée d'une demi-circonférence. Si le système avance d'un demi-arc, le terme constant est l'unité inclinée de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ce qui revient à $+1$. Si le système avance d'un quart d'arc, le terme constant est l'unité inclinée de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ou

$$\cos\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.$$

Si le système avance d'un huitième, le terme constant est l'unité inclinée de $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ ou

$$\cos\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\sqrt{-1}.$$

Composition de l'équation dans le cas où il manque une racine au système, etc.

85. *Toute équation dont les racines sont des unités également espacées sur le cercle et où la dernière manque, a tous ses coefficients égaux à* $+1$.

Il suffit de faire voir que la somme des produits des racines, prises, une à une, deux à deux, trois à trois, etc. *est toujours l'unité* positive ou négative. Et qu'ensuite les changements de signe qu'il faut faire sur ces produits pour les faire devenir les coefficients de l'équation *les rendent tous positifs*.

Nous pourrions tirer de ce qui précède (81), la démonstration du théorème actuel, en disant. Si la dernière racine ne manquait pas, l'équation s'élèverait d'une unité dans son degré, perdrait tous ses termes moyens et prendrait la forme x^m-1. On sait que cette expression peut être divisée par $x-1$, ce qui revient à enlever la racine $+1$, et que les coefficients sont égaux à $+1$. Mais

nous ne verrions pas comment ces coefficients égaux à l'unité résultent des racines imaginaires. De plus nous nous appuierions sur la divisibilité de l'expression $x^m - 1$ par $x - 1$ que l'on ne connaît que par les éléments de l'algèbre ordinaire, et non par la théorie des imaginaires que nous voulons développer de plus en plus.

Pour fixer les idées, soit une équation à quinze racines, disposées sur le cercle de manière que la dernière manque, c'est-à-dire, celle qui ferait la seizième. Figurons-nous le polynome où l'on aurait opéré la composition de l'équation par les racines, supposons-les représentées par les quinze lettres $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,k\,l\,m\,n\,o\,p$. Devant la puissance, par exemple, dixième, de x, il y aura pour coefficient une colonne des produits de cinq lettres qu'on peut faire en puisant sur quinze lettres. Ainsi des autres termes. Il s'agit de trouver la valeur ou la *résultante* de chacune de ces colonnes. Reprenons la colonne à cinq lettres Si la seizième racine, que nous pouvons appeler q, y était, nous savons (80) que cette colonne serait zéro. Nous pouvons regarder la colonne à cinq lettres faite en puisant sur seize, comme formée de toutes les combinaisons qu'on peut faire sans q, plus de toutes celles qu'on peut faire en employant q. Mais toutes celles qu'on peut faire en employant q, ne sont autre chose que la colonne à quatre lettres sans q dont on a multiplié tous les termes par q, par conséquent la colonne elle-même. Or la multiplication par q ne la change pas, parce qu'elle ne fait que lui ajouter l'inclinaison de q qui n'en a point, car il est $+1$. Mais après cette multiplication, elle est égale et de signe opposé à la colonne à cinq lettres sans q, puisque réunie à cette colonne elle la réduit à zéro.

On pourrait faire le même raisonnement pour deux colonnes voisines quelconques. Donc avant l'arrivée de q, toutes les colonnes sont égales et de signe opposé. Mais la colonne à une lettre est -1, parce qu'elle est la somme ou la résultante de toutes les racines : car une résultante est égale et opposée à la force qui manque pour produire l'équilibre. La force ou racine qui manque au système des racines et qui en produirait l'équilibre, est $+1$. La résultante de la colonne est donc -1. La résultante de la colonne à deux lettres sera $+1$, la résultante de la colonne à trois lettres -1, etc. Mais on sait (par l'algèbre) qu'il faut changer le signe de toutes les colonnes à un nombre impair de lettres, pour en faire les coefficients de l'équation. Donc *tous les coefficients seront* $+1$, comme nous avions annoncé.

86 S'il manquait une racine autre que la dernière, la racine appelée c, par exemple, qui a trois arcs d'inclinaison, l'équation aurait encore des coefficients *très réguliers*, ils seraient tous l'unité comme précédemment; mais en inclinaison, ils différeraient entre eux de *l'inclinaison de la racine manquante*. (Ci-dessus ils différaient aussi de l'inclinaison de la racine manquante, qui était nulle). En effet nous pouvons dire, comme dans l'article (85) : la colonne à quatre lettres sans c, multipliée par c, ferait équilibre à la colonne à cinq lettres sans c, Donc elles sont égales et de signe opposé, après la multiplication, ces deux colonnes. Mais nous ne pouvons pas dire comme de q, que sa multiplication ne change pas la colonne à quatre lettres. Elle fait tourner de son inclinaison, qui est trois arcs ou $\frac{3}{16}$, la résultante de cette colonne. Avant la multi-

plication elle a donc ces trois arcs de moins qu'il ne faut pour être en opposition avec la colonne suivante. Donc tout est comme ci-dessus, à ceci près, que toute colonne de produits, a de moins que la colonne qui a une lettre de plus, une demi-circonférence plus l'inclinaison de la racine manquante. Le changement de signe qu'on doit faire pour changer les colonnes en coefficients, détruit les demi-circonférences de différence, comme ci-dessus. Mais *l'inclinaison de* c, *ou de la racine manquante reste pour différence d'un terme à l'autre*, comme nous avions annoncé.

S'il s'agissait de la racine a, il n'y aurait que $\frac{1}{16}$ de différence entre l'inclinaison des termes. S'il s'agissait de la racine b, il y aurait $\frac{2}{16}$, etc.

Si c'est la racine a qui manque, ou celle qui a $\frac{1}{16}$ d'inclinaison, l'équation sera

$$x^{15}+x^{14}\left(\cos\frac{1}{16}+\sin\frac{1}{16}\sqrt{-1}\right)$$
$$+x^{13}\left(\cos\frac{2}{16}+\sin\frac{2}{16}\sqrt{-1}\right)\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots+x\left(\cos\frac{14}{16}+\sin\frac{14}{16}\sqrt{-1}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{15}{16}+\sin\frac{15}{16}\sqrt{-1}\right)=0.$$

Si c'est la racine b qui manque, l'équation doit être

$$x^{15}+x^{14}\left(\cos\frac{2}{16}+\sin\frac{2}{16}\sqrt{-1}\right)$$
$$+x^{13}\left(\cos\frac{4}{16}+\sin\frac{4}{16}\sqrt{-1}\right)\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots+x\left(\cos\frac{28}{16}+\sin\frac{28}{16}\sqrt{-1}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{30}{16}+\sin\frac{30}{16}\sqrt{-1}\right)=0.$$

87. Supposons qu'il manque deux racines (consécutives), la racine q et la racine a. Les coefficients de l'équation ne sont pas l'unité, mais ils sont encore *très remarquables*. Ils sont les *cordes* d'un cercle ou les *diagonales d'un polygone régulier de* 16 *côtés égaux chacun à l'unité. Le premier coefficient*, en commençant par les hautes puissances de x, savoir le coefficient de x^{14}, est le côté allant du sommet 0 *au sommet* 1, il est $+1$, parceque nous regardons ce côté comme étant sans inclinaison. Le coefficient de x^{13} ou le *second coefficient*, est la diagonale allant du sommet 0 *au sommet* 2, le *troisième* coefficient est la diagonale allant *au sommet* 3, le *quatrième* coefficient, la diagonale allant *au sommet* 4, etc. et le *quinzième* coefficient ou le terme *constant* est la diagonale allant au *sommet* 15, c'est-à-dire, qu'il est le *dernier côté* du polygone. (Le coefficient suivant serait une diagonale 0).

Il est inutile de faire commencer le raisonnement au premier coefficient, on sait qu'il est l'unité. Considérons le coefficient du second terme Nous savons qu'il est la somme des racines prise en signe contraire. Or, la somme ou la *résultante* du système des racines, quand il en manque deux, q et a, qui sont les racines marquées zéro et 1 dans le cercle, est égale et en sens opposé à celle des forces manquantes, puisque si elles y étaient il y aurait équilibre, cette somme est donc égale à la somme des racines 8 et 9. Voilà la résultante de la colonne à une lettre. La résultante ou la somme de la colonne à deux lettres quand une nouvelle lettre arrive s'obtient, comme nous avons déjà remarqué (85), en multipliant la colonne à une lettre sans la lettre qui arrive, par la lettre qui arrive, et ajou-

tant ce résultat à la colonne à deux lettres faite sans la lettre qui arrive. Ici la lettre que nous supposons arriver c'est a. Celles qui y sont, sont les 16 à l'exception de q et de a. Pour avoir la colonne à deux lettres avec a, il faut donc multiplier par a, la colonne à une lettre sans a, et ajouter ce résultat à la colonne à deux lettres sans a. Or, la colonne à une lettre sans a se réduit comme nous venons de voir aux racines 8 et 9. Multipliées par a, qui a un arc d'inclinaison, elles deviennent 9 et 10. Il faudrait ajouter ce résultat à la colonne à deux lettres sans a pour avoir la colonne à deux lettres avec a. Mais nous savons par ce qui précède (85) que le résultat serait $+1$, parce que nous tomberions dans le cas où il ne manque qu'une racine. La colonne à deux lettres sans a que nous ne connaissons pas est donc égale à $+1$ quand on y ajoute les racines 9 et 10. Or, il est facile de voir que ce sont les racines marquées 0, 1, 2, qui produisent cet effet. Les deux dernières neutralisent les forces 9 et 10 et celle qui est marquée zéro donne le $+1$ qu'il faut.

Les trois racines ou forces 0, 1, 2, multipliées par a, avancent encore d'un pas et deviennent lès forces 1, 2, 3. Ajoutées à la colonne à trois lettres sans a, elles doivent donner la résultante -1. Il est facile de voir que la colonne cherchée, qu'il faut ajouter se réduit aux quatre forces 8, 9, 10, 11. Les trois dernières font équilibre aux trois forces 1, 2, 3 et la force 8 est -1. Ainsi de suite.

Donc les sommes que nous cherchons, et qui doivent servir de coefficient à l'équation, en changeant les signes convenablement sont respectivement les racines 8 et 9, les racines 0, 1, 2; les racines 8, 9, 10, 11; les racines

0, 1, 2, 3, 4, etc. En changeant les signes de la première, de la troisième etc., de ces sommes, cela fait toujours commencer les arcs à zéro, et les coefficients seront donc respectivement la résultante des groupes de racines 0, 1; 0, 1, 2; 0, 1, 2, 3; 0, 1, 2, 3, 4; etc.

On peut (29) construire ces racines ou ces forces, qui sont toutes égales à l'unité, par un polygone régulier de 16 côtés égaux à l'unité, et l'on aura pour les résultantes, les *cordes* ou les *diagonales que nous avons annoncées.*

88. Appliquons cela à l'équation du quatrième degré $x^4 - 1 = 0$, dont les quatre racines sont

$$+1, +\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}.$$

Imaginons qu'on veut composer une équation du second degré dans laquelle manquent les deux premières racines. Le polygone à construire sera un quarré. La diagonale allant au sommet 2 et qui doit faire le coefficient du second terme sera $1 + \sqrt{-1}$, la diagonale allant au sommet 3, qui doit être le coefficient constant et qui se réduit à un côté est $\sqrt{-1}$. L'équation sera donc

$$x^2 + (1 + \sqrt{-1})x + \sqrt{-1} = 0.$$

Résolue, elle donne

$$x = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{-1}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{-1}}.$$

Il faut voir là dedans les deux racines -1 et $-\sqrt{-1}$.

En effet $-\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{-1}\right)$ est la demi-diagonale du quarré, prise négativement, c'est-à-dire, ayant une inclinaison de deux droits et demi. De sorte que si l'on imagine autour de l'origine quatre unités à angle droit, détermi-

nant quatre quarrés, l'expression ci-dessus est la *demi-diagonale du troisième quarré.* L'expression

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{-1}}$$

est la *demi-diagonale* du *second* ou du *quatrième* quarré, suivant qu'elle est prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$. En effet $-\sqrt{-1}$ est l'unité inclinée des trois angles droits. Le grand radical qui l'affecte, réduit son inclinaison à la moitié (36), c'est-à-dire, à un droit et demi, Elle est donc dirigée suivant la diagonale du second quarré. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ qui l'affecte encore lui donne la longueur de la moitié de cette diagonale du second quarré, et du quatrième si on prend le signe $-$. Maintenant la demi-diagonale du troisième quarré, que nous avions en premier lieu, composée avec la demi-diagonale du second quarré donne pour résultante la racine -1, et composée avec la demi-diagonale du quatrième quarré, donne la racine $-\sqrt{-1}$: ce qui forme bien les racines que nous voulions.

89. Ci-dessus (87), les deux racines manquantes étaient q et a, c'est-à-dire qu'elles étaient consécutives. Supposons qu'avec q ce soit b qui manque. Les coefficients seront toujours donnés par des cordes tirées *du sommet zéro à tous les autres*, dans un polygone, ou plutôt *ligne polygonale*, à côtés égaux à l'unité, mais *inclinés du double* de ce qu'ils étaient au paravant, c'est-à-dire, que la différence d'inclinaison d'un côté à l'autre, ou chaque angle extérieur est de $\frac{2}{16}$. Cela donne un polygone régulier de huit côtés ; et la corde fera *deux fois le tour* pour donner tous les coefficients. On voit cela en pensant que b ayant une inclinaison double de a, fait un effet double, dans la construction, sur l'inclinaison des côtés

Si le nombre des côtés n'est pas pair, ou *divisible par deux*, chaque tour de la ligne polygonale ne donnera pas un polygone complet, ce ne sera qu'à la fin des deux tours que le polygone se *fermera véritablement*, c'est-à-dire, que le dernier sommet tombera sur le premier.

Si c'est q et c qui manquent le polygone tournera *trois fois plus vite.* Et de même il ne serait complet à chaque tour qu'autant que le nombre des côtés serait *divisible par trois*, etc.

En appliquant au quatrième degré, quand c'est q et b qui manquent, le polygone se réduit *à une droite.*

90. Au nombre des racines manquantes était toujours q, c'est-à-dire la racine sans inclinaison. Supposons que ce soit a et b qui manquent. Avec un peu d'attention, nous découvrirons que les choses se passent comme auparavant excepté que les cordes coefficients ne commencent plus au même sommet, qui était l'origine de la racine sans inclinaison, mais *aux sommets consécutifs.* Au reste ce cas et les suivants se lient tous ensemble en disant que *les cordes qui doivent faire les coefficients de l'équation où il manque deux racines* (*consécutives ou non consécutives*), *commencent à l'origine des coefficients* (*qui sont aussi des cordes*) *de l'équation dans le cas où il ne manquait encore que la première de ces deux racines.* Quand q était la première racine manquante, les cordes commençaient toutes au même point, parce que les coefficients de l'équation sans q y commenceraient. Si c'est a qui manque nous avons vu (86) que les coefficients de l'équation sans a sont tous égaux à l'unité; mais inclinée de 0, 1, 2, 3, etc. arcs, c'est-à-dire,

qu'ils sont des cordes qui sont les côtés successifs du polygone. Hé bien! les cordes coefficients de l'équation sans *a* et une autre racine commenceront à l'origine des coefficients sans *a*, c'est-à-dire, au sommet zéro, ensuite au sommet 1, au sommet 2, etc.

En effet, pour passer d'un coefficient à l'autre quand c'est *q* et une autre racine qui manquent, *a* par exemple, (87) nous disons : multiplions par *a* le coefficient obtenu, qui est une corde, ou bien plusieurs côtés consécutifs du polygone, ou bien plusieurs racines consécutives du système. Cette multiplication fait tourner cette somme, d'un arc. Si elle était les racines dont l'inclinaison est 0, 1, 2, 3, par exemple, elle devient les racines dont l'inclinaison est 1, 2, 3, 4. Pour produire le coefficient de l'état précédent ou plutôt la colonne des combinaisons, qui est le coefficient avant le changement de signe, il faut y ajouter —1, c'est-à-dire, la racine marquée 8, parce que le coefficient de l'état précédent était —1, ensuite les racines marquées 9, 10, 11, 12 pour neutraliser 1, 2, 3, 4. Maintenant, si *a* est la première racine manquante et *b* la seconde, en multipliant par *b* nous ferons tourner de deux arcs; mais le coefficient de l'état précédent tourne d'un, parce que cet *a* qui y manque, pour le produire, il faudra donc d'abord neutraliser le résulta de la multiplication, et ensuite produire la force opposée au coefficient de l'état précédent, ce qui donne une racine voisine du groupe neutralisant le produit qui a tourné, c'est-à-dire, que la racine qui faisait le coefficient (au signe près) ou la colonne de l'état précédent, vient toujours *s'ajuster au groupe qui a tourné* par la multiplication, et par conséquent fait *commencer le résultat* ou la corde, avec elle

Ces conclusions existent pour a et c, pour a et d etc.

De même elles existent pour b et c, b et d etc. En effet la multiplication par c ferait tourner de trois arcs, le coefficient de l'état précédent aurait tourné de deux, il *s'ajusterait* encore comme ci-dessus, et *commencerait le résultat* ou la corde.

91. Quand nous disons que les cordes donnent les coefficients, il faut entendre en longueur et en *direction*; mais non en position, quand elles ne partent pas de l'origine. Il faut toujours imaginer qu'elles doivent être transportées parallèlement de manière à ce que *leur origine* (*ou point d'application*) *soit à l'origine générale* avant d'être appelées coefficients. Il en est ainsi, parce qu'il y a eu un déplacement artificiel des racines, elles avaient toutes naturellement la même origine, et formaient des rayons de cercle, tandis que pour la construction nous les avons regardées comme faisant des côtés de polygone

92. Supposons qu'il manque trois racines q, a, b. La loi des coefficients se complique, cependant ils s'obtiennent aves des *cordes* ou *combinaisons de cordes.*

Le coefficient du second terme serait une corde ou diagonale à trois arcs partant du point zéro.

Le coefficient du troisième terme une corde à cinq arcs, partant du point zéro, plus une corde à un arc, partant du point 2.

Le coefficient du troisième terme serait une corde à sept arcs, partant du point zéro, plus une corde à deux arcs partant du point 2, plus une corde à un arc partant du point 4.

Le coefficient du quatrième terme une corde à neuf arcs partant du point zéro, plus une corde à trois arcs partant du point 2, plus une corde à deux arcs partant du point 4, plus une corde à un arc partant du point 6.

Etc.

On trouvera la démonstration en suivant une marche analogue à ce qui précède. Nous ne la donnons pas par la crainte de devenir trop long, comme aussi nous ne considèrerons pas les cas suivants où la loi serait encore plus composée.

Extension de la méthode de Newton au calcul des racines imaginaires, ou généralisation de cette méthode.

93. La méthode de Newton, pour calculer avec approximation les racines réelles d'une équation, consiste à substituer à la place de x une grandeur réelle qui approche déjà de la racine cherchée à moins d'un dixième, et à calculer ensuite ce qui manque pour achever cette racine.

Pour cela, attendu qu'un polynôme pour de petites valeurs de sa variable, ne varie à peu près que par celui de ses termes qui renferme la plus basse puissance de la variable, c'est-à-dire, la première, on tâche d'obtenir un polynôme ordonné suivant les puissances d'une lettre exprimant ce qui manque à la racine. Ce qui manque étant au-dessous d'un dixième, les termes renfermant les puissances supérieures sont au-dessous d'un centième, à moins qu'il n'y ait de très grands coefficients: on se permet de les négliger comme n'influant pas beaucoup sur l'équation, qui, par là, devient du premier degré, par conséquent facile à résoudre et donne avec approximation ce qui manque à la racine. Pour

avoir un polynôme où ce qui manque à la racine soit *représenté par la lettre ordonnatrice*, il suffit de substituer $x+i$ à la place de x, et le polynôme ou l'équation devient

$$X+X'i+\frac{X''}{1.2}i^2+.....=0,$$

X, X', X'', etc., représentant le polynôme en x et ses dérivées. En négligeant les hautes puissances de i, on a une équation du premier degré, qui donne

$$i=-\frac{X}{X'},$$

pour la valeur à ajouter à celle qu'on est censé avoir mise à la place de x dans les polynômes X et X': (sauf les vérifications connues).

S'il s'agit *de la recherche d'une racine imaginaire*, c'est-à-dire, d'une droite dont l'extrémité est en un point *inconnu* du plan, en supposant qu'on ait substitué une droite dont l'extrémité soit éloignée de l'extrémité cherchée de moins d'un dixième, il n'y aura donc plus à trouver qu'une petite ligne inconnue en *longueur* et en *direction*. Si elle était connue, nous l'ajouterions (29) à la droite qui est déjà à la place de x et nous aurions la racine cherchée. Or si cette petite droite est représentée par i, dans l'équation transformée comme ci-dessus, les termes affectés des puissances supérieures ne modifieront que très peu la valeur du polynôme pour la longueur, comme l'on sait, et que très peu aussi pour la direction, car d'après ce que nous avons remarqué (47) pour les petites valeurs de la variable, le terme affecté de la plus basse puissance *donne à peu près sa direction à la résultante.* Donc on pourra comme pour les racines réelles, négliger les termes supérieurs, et la ligne à ajouter sera également donnée par la formule

$$i=-\frac{X}{X'}.$$

94. Soit l'équation $x^4-3x^3+5x^2-6x+18=0$. Supposons que par un moyen quelconque on ait découvert qu'une droite que j'appelle p, ayant 2,4 de longueur que j'appellerai a et $39^d,2$ (nouvelle division) d'inclinaison que j'appellerai α approche beaucoup de la racine. Il faut donc substituer p dans X et X'.

Puisque

$p=a(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})=2,4(\cos 39,2+\sin 39,2\sqrt{-1})$

nous aurons pour X, que nous appellerons P après la substitution, les résultats suivants :

$$+18 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 18$$
$$-6a\cos\alpha = -6a\cos 39,2 = \ldots\ldots\ldots - 11,75528$$
$$+5a^2\cos 2\alpha = +5a^2\cos 78,4 = \ldots\ldots\ldots + 9,5852$$
$$-3a^3\cos 3\alpha = -3a^3\cos 117,6 = +3a^3\cos 82,4 = +11,31986$$
$$+a^4\cos 4\alpha = +a^4\cos 156,8 = -a^4\cos 43,2 = -25,8275.$$

Cela nous donnera la partie réelle de P et nous trouverons

partie réelle de $P=+1,32228$.

Pour la partie imaginaire nous aurons :

$$-6a\sin\alpha = -6a\sin 39,2 = \ldots\ldots\ldots - 8,317047$$
$$+5a^2\sin 2\alpha = +5a^2\sin 78,4 = \ldots\ldots\ldots + 27,15812$$
$$-3a^3\sin 3\alpha = -3a^3\sin 117,6 = -3a^3\sin 82,4 = -39,89721$$
$$+a^4\sin 4\alpha = +a^4\sin 156,8 = +a^4\sin 43,2 = +20,82529.$$

En réduisant nous trouvons :

partie imaginaire de $P=-0,230847$.

Nous avons donc,

$$P=1,32228-0,230847\sqrt{-1}.$$

X' est $4x^3-9x^2+10x-6$.

Nous aurons encore en substituant p.

$$-6 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots - 6$$
$$+10a\cos\alpha = +10a\cos 39{,}2 = \dots\dots\dots\dots + 19{,}59214$$
$$-9a^2\cos 2\alpha = -9a^2\cos 78{,}4 = \dots\dots\dots\dots - 17{,}25336$$
$$+4a^3\cos 3\alpha = +4a^3\cos 117{,}6 = -4a^3\cos 82{,}4 = -15{,}09315.$$

Partie réelle de $P' = -18{,}75437$.

$$+10a\sin\alpha = 10a\sin 39{,}2 = \dots\dots\dots\dots + 13{,}86174$$
$$-9a^2\sin 2\alpha = -9a^2\sin 78{,}4 = \dots\dots\dots\dots - 48{,}88462$$
$$+4a^3\sin 3\alpha = +4a^3\sin 117{,}6 = +4a^3\sin 82{,}4 = +53{,}19627.$$

Partie imaginaire de $P' = +18{,}17339$,

Nous avons donc

$$P' = -18{,}75437 + 18{,}17339\sqrt{-1}.$$

Pour trouver la valeur (approchée) de i, il faut diviser P, par P′ et changer le signe. Pour faire cette division il faut que P et P′ soient *modulés*, je veux dire que la longueur ou module de la ligne et l'angle d'inclinaison soient séparés.

Pour avoir le module nous savons qu'il faut quarrer les deux parties, les ajouter et extraire la racine ; et pour avoir l'inclinaison, il faut diviser la partie imaginaire par la partie réelle et passer de la tagente au cosinus. En faisant cela nous trouvons d'abord

$$\frac{P}{P'} = \frac{1{,}342279(\cos 388{,}9966 + \sin 388{,}9966\sqrt{-1})}{26{,}1151(\cos 151{,}0015 + \sin 151{,}0015\sqrt{-1})}.$$

Divisant les modules et soustrayant les arcs,

$$= 0{,}05139857(\cos 237{,}9951 + \sin 237{,}9951\sqrt{-1}).$$

En ôtant 200 degrés à l'arc pour changer le signe, nous trouvons enfin

$$i = -\frac{P}{P'} = 0{,}05139857(\cos 37{,}9951 + \sin 37{,}9951\sqrt{-1}).$$

Cette valeur opprochée de i, que pour abréger j'ap-

pellerai q, en nommant son module b et son inclinaison β doit être ajoutée (mécaniquement) à

$$p = 2,4(\cos 39,2 + \sin 39,2\sqrt{-1}).$$

Les deux grandeurs à ajouter, ou composer sont modulées au lieu de les *démoduler*, pour ajouter ensemble les parties réelles et les parties imaginaires, nous les composerons par le parallélogramme des forces. C'est un triangle à résoudre dont nous avons deux côtés a et b et nous pouvons avoir l'angle compris C. Il est le supplément de la différence des deux inclinaisons, c'est-à-dire que $C = 200 - \alpha + \beta = 198,7951$. Nous pouvons calculer c par la formule trigonomètrique connue

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

Ou bien, si nous voulons employer les logarithmes, par la formule

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{(a-b)\cot\frac{1}{2}C}{a+b}\right)},$$

et nous trouverons $c = 2,45139$, en conservant cinq décimales.

C'est là la longueur ou le module de la valeur approchée de x. Pour avoir son inclinaison, il faut chercher l'angle B. Par les formules connues on trouve $B = 0,025262$. Il faut retrancher cet angle de $\alpha = 39,2$ ce qui donne 39,1747 pour l'inclinaison cherchée, en ne conservant que les secondes. Par conséquent la valeur approchée de x, dans sa longueur et son inclinaison est

$$x = 2,45139(\cos 39,1747 + \sin 39,1747\sqrt{-1}).$$

Nous avons conservé plus de décimales qu'il n'y en a peut-être de bonnes, puisqu'en général comme l'on

sait cette première opération de la méthode de Newton n'est exacte qu'à un centième près. Cependant il est possible et même probable qu'en conservant plus de chiffres décimaux on est plus près de la vraie valeur qu'en les abandonnant tout à fait. Et cette plus grande proximité favorise l'approximation de l'opération suivante.

Pour opérer une seconde approximation, la valeur approchée que nous venons de trouver pour x, devra être substituée ou remise en calcul comme p l'avait été. Il n'y aura pour cela qu'à l'appeler elle-même p, son module a, etc., c'est-à-dire, à conserver dans ce nouveau calcul les mêmes lettres aux grandeurs correspondantes à celles du premier, et en partant de

$$p = a(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})$$
$$= 2{,}45139(\cos 39{,}1747 + \sin 39{,}1747\sqrt{-1}),$$

et suivant la même marche que dans la première substitution nous trouverons pour la valeur approchée de x; après cette seconde substitution,

$$x = 2{,}449492(\cos 39{,}18265 + \sin 39{,}18265\sqrt{-1}).$$

Pour opérer une troisième approximation, on ferait la substitution de cette valeur de x en l'appelant p, son module a, son inclinaison α, ainsi de suite.

Cette valeur doit en général approcher à moins d'un dix-milième d'erreur, attendu qu'il y a eu deux substitutions. Mais elle approche encore d'avantage car elle diffère de la vraie valeur de moins de quatre millionièmes, pour la longueur; et pour l'inclinaison elle ne diffère pas aux dixièmes de seconde ou cent-milièmes de degré. On sent que l'approximation doit être plus rapide

que pour les grandeurs réelles, car la *diversité des inclinaisons des lignes ou forces combinées, est favorable à leur destruction.*

Pour juger facilement de l'approximation du résultat j'ai pris une équation du quatrième degré composée de deux du second qui sont :

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$
$$x^2 + x - 3 = 0.$$

c'est une des racines de la première que nous avons cherchée, savoir :

$$x = 2 + \sqrt{2}\sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{6}\left(\cos \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-1}\right).$$

95. Nous remarquerons en passant que dans une équation du second degré dont les racines sont imaginaires la *longueur* de la racine est toujours donnée *par la racine quarrée du terme constant* et la tangente de son *inclinaison par la racine (quarrée) de l'excès du terme constant sur le quarré de la moitié du coefficient, divisé par la moitié du coefficient pris en signe contraire* : algébriquement

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\sqrt{-1} =$$
$$\sqrt{q}\left(\cos \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{-\frac{p}{2}} + \sin \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}{-\frac{p}{2}}\sqrt{-1}\right)$$

l'équation étant $x^2 + px + q = 0$.

On voit facilement (par l'une ou l'autre de ces expressions) que si p varie, l'extrémité de la racine décrit *une circonférence*. Si q varie, l'extrémité de la racine décrit une perpendiculaire à l'axe, le coupant à $-\frac{p}{2}$ de l'origine

Si q s'abaisse au-dessous de $\frac{p^2}{4}$, la partie verticale de la racine change d'axe et l'extrémité se meut alors sur l'axe horisontal. De sorte que pour une variation complette réelle de q, ou pendant que q décrit l'axe des x, une des racines de l'équation décrit *les côtés d'un angle droit* (une équerre), ayant son sommet à l'extrémité de $-\frac{p}{2}$. Et les deux racines ensemble décrivent deux angles opposées au sommet, qui forment *deux perpendiculaires se coupant au point* $-\frac{p}{2}$.

On verra facilement aussi que si p décrit tout l'axe des x, l'extrémité d'une racine aura la marche suivante. Pendant que p ou plutôt $\frac{p}{2}$ va de zéro à $\sqrt{q}$, l'extrémité d'une racine part de l'axe des y, d'une hauteur égale à $\sqrt{q}$, décrit un quart de circonférence à gauche et arrive à l'axe des x, à une distance $= -\sqrt{q}$. Pendant que $\frac{p}{2}$ à partir de là, décrit l'axe des x, jusqu'à l'infini positif, l'extrémité de la racine que nous considérons, décrit le rayon gauche du cercle, et arrive au centre quand $\frac{p}{2}$ arrive à l'infini. Quand $\frac{p}{2}$ va de zéro à $-\sqrt{q}$, ou décrit le rayon gauche, l'extrémité de la racine part encore du même point de l'axe des y que la première fois décrit le quadrant supérieur à droite et arrive à $\sqrt{q}$ en même temps que $\frac{p}{2}$ à $-\sqrt{q}$. Pendant que $\frac{p}{2}$ va à l'infini négatif, ou décrit l'axe à gauche, hors du cercle, la racine le décrit à droite, aussi à partir du cercle. On peut donc dire que pendant que $\frac{p}{2}$ *va de l'infini positif à l'infini négatif*, une des racines part du *centre* du cercle, *décrit le rayon gauche, la demi-circonférence supérieure, et l'axe à droite hors du cercle.*

L'autre racine décrit *un lieu symétrique* à celui-là. On voit que leur réunion forme *l'axe entier avec une circonférence*. Il y aurait beaucoup de considérations à faire là-dessus, mais revenons à notre objet.

Première approximation et limites.

96. On prescrit pour les racines réelles, afin d'avoir une première approximation (93) à un dixième près, quand deux nombres substitués ont fait changer le signe du polynôme, de substituer un nombre *intermédiaire* entre les deux nombres substitués, qui devra donner un résultat intermédiaire entre les deux premiers résultats, et par conséquent resserrer zéro de plus près avec un des premiers résultats. Le nombre intermédiaire peut être pris à égale distance des deux premiers nombres substitués ; mais il est mieux de le prendre de manière qu'*il divise l'intervalle des nombres substitués, comme zéro divise l'intervalle des deux résultats correspondants du polynôme*. Lors même que les deux premiers résultats ne comprendraient pas zéro, s'ils étaient dans le voisinage, ils pourraient encore servir pour déterminer à peu près le troisième nombre à substituer en établissant la proportion convenablement. Après une troisième substitution on en fait une quatrième, une cinquième, etc. s'il le faut.

La marche à suivre pour les racines imaginaires est analogue à cela. Mais comme nous opérons sur un plan et non sur une ligne, c'est *trois substitutions* qu'il faut d'abord au lieu de deux. Supposons que trois grandeurs ou lignes (en général inclinées) dont les extrémités forment sur le plan un triangle ABC, substituées

pour x donnent trois résultats correspondants formant un triangle A′B′C′ *qui renferme le point zéro, ou l'origine.* La valeur de x qui doit amener l'extrémité du polynôme à l'origine, doit avoir son extrémité dans le triangle ABC. Pour en approcher, d'un des sommets A′, par exemple, du triangle A′B′C′, tirons une droite à l'origine, voyons comment cette droite divise à peu près l'angle A′. Si elle le divise aux trois cinquièmes, tirons aussi dans le triangle ABC, du sommet A, une droite divisant cet angle aux trois cinquièmes. Elle devra passer *près du point cherché.* Pour avoir sa longueur faisons pour un autre angle B′, ce que nous avons fait pour A′, et *l'intersection des droites nous donnera* le point cherché. Ou bien faisons que la longueur de la droite qui divise A, soit à la droite qui divise A′ et arrive à l'origine, *comme la somme des côtés* AB+AC : A′B′+B′C′.

Nous trouverons donc de cette manière un nouveau point que j'appelle D. La valeur qui s'y termine substituée à la place de x, donnera un résultat qui se terminera en un point D′. Ce point avec deux des trois A′,B′,C′, formera un triangle *renfermant l'origine de plus près que le premier triangle.* On pourra partir de nouveau de celui-ci pour insérer, ainsi de suite.

Si le triangle des résultats ne renferme pas l'origine, sans en être pourtant très éloigné, on peut tout de même s'en servir. La droite qui divisait l'angle A′ pour aller de A′ à l'origine, ne sera pas dans l'angle, elle fera extérieurement avec un côté de l'angle A′, un angle qui sera, par exemple, le quart de cet angle, on fera faire à la droite qui partira du point A, un angle extérieurement qui soit le quart de l'angle A.

97. Mais pour opérer ces substitutions et ne pas se perdre dans des essais inutiles en cherchant où les racines ne sont pas, comme aussi pour ne pas laisser des racines ; il faudrait, comme pour les racines réelles, déterminer des limites *hors desquelles il ne faille pas chercher.* Pour les racines réelles c'est sur l'axe des x qu'ont lieu les limites ; ici ce doit être sur le plan. Nos limites doivent enfermer *une partie de ce plan hors de laquelle il n'y ait plus de racines.*

On peut même remarquer que, si nous arrivons là, nous serons un peu plus avancés que pour les racines réelles, parce que nous connaissons toujours, par le degré de l'équation, le nombre de racines que nous devons trouver dans nos limites.

Je suppose que l'équation soit à coefficients réels. Il existe une valeur de x qui rend le premier terme d'un polynôme plus grand que la somme de tous les autres, il est la limite supérieure des racines réelles; c'est comme l'on sait, le plus grand coefficient augmenté de l'unité. Je dis qu'*une circonférence décrite avec cette limite, enferme toutes les racines* (*réelles et imaginaires*). En effet, faisons tourner cette limite en lui conservant sa longueur ; tous les termes de l'équation tournent plus ou moins vite, en conservant leurs longueurs respectives ou modules. Les termes secondaires (les termes à l'exception du premier), ne pourraient pas détruire le premier, lors même qu'ils seraient dans le cas le plus favorable, c'est-à-dire, tous en opposition avec lui ou tous négatifs. Mais dans le mouvement leur résultante perd de sa longueur, parce que les composantes se séparent. Donc elle ne peut faire équilibre au premier terme.

S'il y a des coefficients imaginaires dans l'équation, il faut entendre qu'ils sont *modulés*, et les conclusions ci-dessus demeurent.

Nous pouvons donc par là, avoir la limite *supérieure* (*ou extérieure*) des racines. Nous pouvons également avoir la limite *inférieure* (*ou intérieure*). Elle est *l'unité divisée par la limite extérieure.* En décrivant deux circonférences, l'une avec la limite extérieure et l'autre avec la limite intérieure, on a une espèce de *zone*, *dans laquelle se trouveront les extrémités de toutes les racines de l'équation.*

98. On détermine pour les racines réelles, une longueur moindre que la plus petite différence entre les racines, ou la *limite inférieure des différences des racines.* On peut faire la même chose pour les racines imaginaires : on peut former l'équation *aux différences* (ou au quarré des différences), en n'ayant égard qu'aux modules, si l'équation a des coefficients imaginaires ; prendre la limite inférieure des racines de cette équation, et l'on aura une longueur *moindre que la distance des extrémités* de deux racines quelconques. Donc dans la zone renfermant les extrémités des racines, on sera dispensé de faire des substitutions *plus rapprochées* que ne l'indique la limite des différences.

Exponentielles et logarithmes.

99. Deux grandeurs réelles ou imaginaires peuvent être unies, par addition (ou soustraction), par multiplication (ou division). Nous avons considéré les fonctions que forment ces deux sortes d'unions et nous avons trouvé l'état de la fonction en grandeur et en direction sur le

plan de variation. Deux grandeurs peuvent encore être unies par le signe des puissances, c'est-à-dire, que l'une est base (ou racine) et l'autre exposant. Nous avons encore trouvé l'état de cette espèce de fonction mais *non dans tous les cas*. La base peut être seule imaginaire et l'exposant réel, ou bien la base réelle et l'exposant imaginaire, ou bien l'un et l'autre peuvent être imaginaires, ce qui fait trois cas. C'est le premier cas que nous avons considéré. Il reste à considérer les deux autres.

Dans l'addition et la multiplication cette différence de cas ne se présentait pas, parce que l'on peut intervertir l'ordre des éléments (ou grandeurs unies), ce qui ne peut pas se faire dans les puissances. La base et l'exposant ne peuvent pas changer de place entre eux.

100. Considérons le cas où la base est *réelle* et l'*exposant imaginaire* (ou réel mais comme cas particulier). Soit a^x. Mais pour plus de commodité ne prenons même pas tout de suite a pour base, mais e : soit donc e^x.

Dans le cas où x tourne, ou devient imaginaire, nous ne voyons pas sur cette forme, ce que devient la fonction. Nous le verrions mieux, si la fonction pouvait se mettre sous la forme de polynôme, parce que nous avons considéré les polynômes. Or on sait que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Si x devient imaginaire, savoir $x\sqrt{-1}$ ou perpendiculaire, une partie seulement des termes de la série devient perpendiculaire ; ce sont les termes de degré impair. Il faudrait alors pour connaître l'état de la fonction en grandeur et en position, trouver la résultante de ces termes.

Mais on sait que l'ensemble des termes horisontaux a pour somme *le cosinus de l'angle dont* x *est l'arc*, et les termes verticaux *le sinus* du même angle ; c'est-à-dire que

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots$$

$$= cos x + sin x \sqrt{-1}:$$

c'est-à-dire, que la résultante est *l'unité* ayant pour inclinaison *l'angle mesuré par* x.

Ainsi un exposant perpendiculaire ou imaginaire (avec la base e) en ne variant que de longueur, fait varier la fonction non de longueur mais *d'inclinaison*. Pendant la variation de x la fonction $e^{x\sqrt{-1}}$ est donc une *unité tournante* (comme l'aiguille d'une montre), qui, partant de l'axe à droite ou positif, se jette périodiquement dans l'axe, à gauche, à droite; à gauche, à droite; etc., à mesure que la longueur x devient 1π, 2π, 3π, 4π, etc.

101. Cette expression composée d'une base réelle e ou *horisontale*, et d'un exposant *vertical* fait le même effet qu'une base imaginaire ou inclinée, égale à l'unité affectée d'un exposant réel (38).

102. Supposons que l'exposant de e soit une *imaginaire complète*, ou une droite inclinée, c'est-à-dire, que nous ayons $e^{n+x\sqrt{-1}}$; et voyons ce que devient la fonction quand l'exposant prend *toutes les valeurs possibles*. Cette expression revient à $e^n \times e^{x\sqrt{-1}}$. Un de ces facteurs est l'unité tournante, l'autre peut être considéré comme le *module*. La partie imaginaire de l'exposant

donne donc *la direction de la fonction* et la partie réelle, *la longueur*.

La partie imaginaire variant depuis zéro jusques à la longueur d'une circonférence, l'unité *fait un tour*. La partie réelle ou exposant du module, variant depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, la grandeur du module va de zéro à l'infini positif. Ces deux variations combinées font parcourir à l'extrémité de l'exponentielle *tout le plan des* xy. L'extrémité de l'exposant, dans le même temps *parcourt la surface d'une bande horisontale ayant une base infinie à droite et à gauche, et pour hauteur la longueur d'une circonférence ou* 2π.

Cet exposant est une *vraie droite inclinée*, puisqu'il a une partie réelle et une partie imaginaire ou verticale. Je dis *verticale*, et l'on pourrait croire qu'elle est un arc, puisqu'elle mesure ou détermine l'inclinaison de l'unité. Mais non : elle est bien égale de longueur à cet arc, mais elle n'est pas cet arc. Elle est verticale puisqu'elle est imaginaire. Et, combinée ou composée avec la partie réelle ou horisontale de l'exposant, elle constitue bien *une droite inclinée pour l'exposant*.

Si l'on imagine que l'exposant engendre une seconde bande horisontale au-dessus de la première, l'extrémité de la fonction engendre encore tout le plan des xy. Pour une troisième bande, il en serait de même. *Chaque bande* donne, pour ainsi dire, une couche de points sur le plan des $x\,y$.

103. On peut remarquer que quand l'extrémité de l'exposant engendre *la partie droite de la bande*, l'extrémité de l'exponentielle engendre *l'extérieur du cercle dont le*

rayon est 1, et quand l'extrémité de l'exposant engendre la *partie gauche de la bande*, l'extrémité de l'exponentielle engendre *l'intérieur de ce cercle*. Parce que dans le premier cas l'exposant du module étant *positif*, le module est *plus grand que l'unité*, et dans le second cet exposant étant *négatif*, le module est plus petit que l'unité.

104. On peut remarquer encore que si l'extrémité de l'exposant *décrit une droite horisontale*, l'extrémité de l'exponentielle *décrit une droite* dont l'inclinaison est marquée par la hauteur de l'horisontale. Et si l'extrémité de l'exposant décrit *une verticale* l'extrémité de la fonction décrit *une circonférence* qui fera un tour, deux tours, etc., suivant que la verticale traverse une bande, deux bandes, etc. La circonférence est *extérieure* ou *intérieure* au cercle à rayon 1, suivant que la verticale décrite est à droite ou à gauche de l'axe des y.

105. Supposons que la base ne soit plus e, mais une grandeur quelconque *positive* a. Il faut imaginer que a est lui-même déjà une exponentielle obtenue avec la base e. De sorte que si l'on met un exposant à a, c'est comme si on le mettait à e en ayant déjà un. Ainsi l'exposant imposé à a peut être censé imposé à e, si l'on imagine qu'il est *multiplié par celui qu'il faut à* e *pour égaler* a : c'est-à-dire, le *logarithme* (néperien) de a.

Pour avoir les variations de la fonction $a^{n+x\sqrt{-1}}$, il suffit donc de considérer celles de la fonction $e^{n+x\sqrt{-1}}$, et de multiplier l'inclinaison obtenue avec e par la, et d'élever le module obtenu à une puissance marquée par la.

106. Nous pouvons donc dire pour une base quelconque (positive) (102) que l'extrémité de la fonction décrit le plan, lorsque l'extrémité de l'exposant décrit une bande dont la hauteur est 2π *divisé par l'exposant qu'il faut à* e *pour égaler la base proposée*, ou par le logarithme de cette base. On voit facilement les modifications à faire aux articles (103) et (104).

107. On peut dire que la variation d'une base (toujours positive), sous un exposant imaginaire *incomplet* modifie *la rotation*, la fait aller *plus vite* que l'exposant, quand la base s'élève au-dessus de e, et *plus lentement* que l'exposant quand la base s'abaisse au-dessous de e. C'est quand la base est e, que l'exposant *mesure* la rotation ou l'inclinaison. Si l'exposant est complet la *longueur* de la fonction est aussi modifiée.

Logarithmes des grandeurs négatives et imaginaires, multiplicité des résultats.

108. On appelle, comme l'on sait, *logarithme* d'une grandeur l'exposant qu'il faut mettre à une base ou racine, à e, par exemple, pour avoir la grandeur proposée. D'après cela, toute grandeur, négative ou imaginaire *a-t-elle un logarithme ? Oui.* En effet l'extrémité de l'exposant parcourant une seule bande (102), l'exponentielle parcourt tout le plan. Il n'y a donc pas de grandeur proposée que l'exponentielle ne puisse devenir. Et quand l'exponentielle sera la grandeur proposée, le logarithme sera l'exposant qui lui correspond, et qui se trouve même sans sortir d'une seule bande. *Une grandeur a donc toujours un logarithme*, même elle en a *plusieurs*, car elle en a un dans chaque bande.

109. En rappelant ce qui précède, il est facile de voir que les grandeurs positives seules ont des *logarithmes réels*, encore n'en ont-elles qu'un, tandis qu'elles en ont une infinité d'*imaginaires*. Les grandeurs *non positives*, c'est-à-dire, négatives ou imaginaires n'ont *que des logarithmes imaginaires*. En effet (104), l'extrémité de l'exposant ou du logarithme décrivant une horisontale, l'extrémité de l'exponentielle ou de la grandeur dont on considère le logarithme, décrit un rayon indéfini dont l'inclinaison est marquée par *la hauteur de l'horisontale*, qui est la partie imaginaire de l'exposant. L'exposant fera trouver l'extrémité de la fonction dans l'axe positif premièrement quand la sienne y sera, c'est-à-dire, quand cet exposant n'aura pas de partie imaginaire; ensuite quand l'extrémité de cet exposant sera sur une horisontale à 2π, à 4π, à 6π, etc. de hauteur, parce que la fonction sera dans l'axe positif, ou pour n'avoir pas bougé, ou pour avoir fait un tour, deux tours, trois tours, etc. Ces hauteurs 2π, 4π etc., qui sont imaginaires et qui s'ajoutent successivement au logarithme réel, nous donnent donc *avec le logarithme* réel, une suite indéfinie de *logarithmes imaginaires*, pour une fonction réelle ou *dans l'axe positif*.

Si l'extrémité de la fonction est ailleurs que sur l'axe positif, l'extrémité de l'exposant ne peut plus être non plus sur cet axe. Si l'extrémité de la fonction est par exemple sur l'axe négatif, celle de l'exposant sera sur une horisontale à la hauteur d'une demi-circonférence ou de π. Si elle est sur une droite ayant une inclinaison d'un quinzième de la circonférence, l'extrémité du logarithme sera sur une horisontale à un quinzième de 2π de

hauteur etc. Donc *il n'y a de logarithmes réels que pour les grandeurs qui sont sur l'axe des* x *positifs*, et encore qui y sont *sans avoir tourné*.

110. On voit par là également que les grandeurs non positives ont non seulement un logarithme imaginaire, mais qu'elles en ont une infinité. Elles en ont un dans chaque bande, que l'on obtient en ajoutant, comme pour les grandeurs positives, $2\pi\sqrt{-1}$ une fois, deux fois etc., au premier logarithme trouvé.

111. Il faut ici répondre à un raisonnement spécieux qui pourrait se présenter à l'esprit. J'appelle R la grandeur positive que j'obtiens en élevant e à la puissance $\frac{1}{2}$. Le logarithme de $+$ R est donc $\frac{1}{2}$. Mais $\frac{1}{2}$ peut aussi servir de logarithme à $-$ R, car $-$ R peut également être considéré comme le résultat de $e^{\frac{1}{2}}$. Donc $-$ R, qui est un nombre négatif, a un logarithme réel. *Non*!

Le logarithme est l'exposant qu'il faut mettre à e pour obtenir la grandeur proposée. On entend que e est un nombre *positif*, unique, et sans équivoque, ni ambiguité. Mais pour avoir e sans équivoque, nous sommes obligés par la nature des choses d'entrer dans des distinctions. Il ne suffit pas de dire de e^1, qu'il est dans l'axe positif. Nous sommes comme celui qui ne pensant qu'à la géométrie plane, croirait avoir défini une droite en la donnant sur un plan par une équation ou une projection. Mais il est possible que notre géomètre soit conduit, pour ainsi dire, par la science elle-même, à la géomètrie à trois dimensions. Et alors il est obligé d'établir des distinctions là où il ne lui semblait pas qu'il y en eût à

faire. Toutes les droites situées dans un même plan vertical ne faisaient pour lui qu'une droite sur le plan horisontal : il faut maintenant qu'il distingue ces droites, si la nature des combinaisons géométriques qu'il a faites conduisent à la considération des trois dimensions ; sans quoi il serait dans la plus grande confusion, en prenant comme grandeur unique, à cause de l'unité de son existence sur le plan horisontal, un résultat qui peut signifier une infinité de lignes pour les trois dimensions. De même une droite positive *n'est pas unique,* pour être dans une *position* unique, savoir dans l'axe positif. Elle peut y être pour n'avoir pas bougé, ou bien pour avoir fait un tour, deux tours etc. La nature des calculs que nous faisons exige cette distinction puisqu'elle conduit à considérer la *rotation*. Il peut donc y avoir pour une ligne, unité de position sans qu'il y ait unité de venue dans cette position. Nous devons donc distinguer deux sortes de positif, l'un qui est l'état d'une droite venue dans l'axe *d'une manière quelconque*, et ne determinant *pas une ligne unique*, et un autre positif, que nous appellerons *absolu*, convenant à une droite qui est dans l'axe sans avoir tourné, et qui détermine *l'unité* ou *indentité* de cette droite (*sur un plan*).

Quand nous prenons e pour base d'un système de logarithme, nous entendons que e est un nombre positif et unique, c'est-à-dire, *positif absolu.* Ce n'est pas la série indéfinie e ayant fait zéro tours, e ayant fait un tour, e ayant fait deux tours, etc., que nous entendons prendre pour base, mais seulement le premier terme de cette suite. Hé bien, l'exposant fractionnaire $\frac{1}{2}$ ne donne un

résultat négatif — R, qu'autant qu'il est censé affecter *e* ayant fait un tour, (ou un nombre impair de tours); parceque dans l'extraction de la racine quarrée on prend la moitié de l'inclinaison, et c'est la moitié d'une ou d'un nombre impair de circonférences, qui nous mène au négatif. Mais avec la base *absolument* positive et unique *e*, il n'y a plus de résultat négatif pour l'exposant $\frac{1}{2}$, ni pour aucun autre exposant fractionnaire quelconque. Donc $\frac{1}{2}$ *ne sert pas d'exposant* ou de logarithme pour le nombre négatif — R.

112. Ce n'est pas la nature de l'exposant fractionnaire qui rend la puissance multiple, mais c'est *la multiplicité de la base.* L'exposant fractionnaire ne fait que *faire ressortir* cette multiplicité qui était *dissimulée par l'unité de position.* Une base positive ordinaire élevée à une puissance entière, sixième par exemple, donne également un résultat multiple : ce sera un résultat ayant fait zéro tours, un autre ayant fait 6 tours, un autre ayant fait 12 tours, un autre 18, etc Mais cette multiplicité qui existe, eu égard à la rotation ou inclinaison n'est pas apparente par la position, qui est unique. Une fraction $\frac{3}{8}$, par exemple, est déterminée tout aussi bien qu'un nombre entier, quand elle est prise sur une grandeur déterminée et unique: mais elle cesse de l'être, du moins son résultat, si la chose dont il faut prendre les $\frac{3}{8}$ est indéterminée.

113. Est-il bon de faire attention à cette correspondance d'unité entre la base et la puissance ? Si le calcul est tel par sa nature qu'il ne le permette pas, forcément

on s'en dispensera : il sera encore mieux d'avoir quinze résultats, par exemple, parmi lesquels on pourra peut-être, par quelque moyen, discerner celui qui convient au cas que l'on a en vue ; que si ce que l'on cherche restait sans aucune détermination, c'est-à-dire, absolument inconnu. Mais c'est une imperfection que cette confusion même partielle ; et on doit la faire disparaître si on le peut, si on a à sa disposition des caractères distinctifs pour établir et entretenir la correspondance. Or ici on les a, c'est *l'inclinaison*. Autrement on ferait comme celui qui confondrait volontairement ensemble tous les logarithmes qui sont les mêmes par la partie décimale, sans avoir égard à la caractéristique. Ses résultats seraient déterminés jusques à un certain point : car il trouverait (dans certains cas), les chiffres qui doivent les représenter, mais il ne saurait pas qu'elle puissance de 10 doit les multiplier, ou comment doit être placée la virgule.

114. La *multiplicité des logarithmes* d'un même nombre dont nous avons parlé (108), n'a lieu aussi que conditionnellement, et par une *indétermination circulaire* sous-entendue, du nombre dont onveutlel ogarithme. Si le nombre, ou en général la grandeur dont on demande le logarithme, était bien déterminée d'inclinaison comme de longueur, le logarithme serait *unique*. Il faudrait dire je veux le logarithme du nombre A, qui a son extrémité dans l'axe positif pour n'avoir pas tourné, ou bien pour avoir fait un tour, deux tours, etc., et la partie imaginaire du logarithme serait alors déterminée. Mais c'est parce que l'on se borne à dire que A est positif, ce qui signifie qu'il a son extrémité dans l'axe (positif), sans expliquer par

combien de tours elle y est venue. Même raisonnement si A avait son extrémité ailleurs que sur l'axe, c'est-à-dire, s'il était imaginaire ou incliné, (110).

115. Nous pouvons donc dire que *toutes les fois qu'on opère sur des grandeurs entièrement déterminées, on obtient un résultat déterminé et unique.*

116. Mais on comprend que pour opérer sur des grandeurs déterminées, il faut les bien savoir déterminer. Pour cela il faut avoir égard aux éléments de variation des grandeurs sur lesquelles on opère; et faire paraître ces éléments d'une manière régulière dans le calcul. Une grandeur peut avoir plusieurs éléments de variation, c'est-à-dire, plusieurs manières de croître ou de diminuer. Des corps que l'on calcule, qui peuvent déjà différer ou varier de trois manières par leurs trois dimensions, pourraient encore varier par leurs poids, leurs valeurs, leurs couleurs et par d'autres propriétés. Si l'on ne fait aucune mention d'un élément de variation d'une grandeur que l'on soumet au calcul, le calcul lui-même n'en fait aucune non plus, et le résultat est indéterminé relativement à la propriété qu'on a passé sous silence; mais on peut cependant le considérer comme déterminé, parce qu'il n'est pas plus indéterminé que les données. Il ne faut pas exiger qu'un résultat nous offre la couleur de pièces de monnaies que nous avons calculées, si dans les données nous n'avons rien fait entrer qui ait trait à cet élément.

Mais il peut arriver que sans le savoir on introduise dans le calcul des cas particuliers d'un élément de variation. Alors le calcul, peut donner des résultats dans ce

que j'appellerai, *toute la ligne de variation*, à laquelle appartiennent les cas particuliers que l'on a introduits. Je dis des cas particuliers au pluriel, car il en faut plus d'un pour déterminer la ligne de variation, comme il faut plus d'un point ou d'un jalon pour déterminer une droite. C'est ainsi qu'arrivent les fractions, lors même qu'on n'engage dans le calcul que des nombres entiers, qui sont des cas particuliers d'une grandeur variant d'une manière continue. On peut dire alors que le calcul *étend les conceptions de l'esprit*.

Les imaginaires sont venues de ce qu'on avait introduit des cas particuliers de direction ou d'inclinaison, savoir, le positif et le négatif. Cela fait deux cas pris sur la ligne de variation et même davantage; parce que, comme nous savons, une droite peut être au positif ou au négatif pour avoir tourné plus ou moins. Mais le négatif qui n'est qu'un signe de soustraction introduit-il nécessairement la direction à gauche? Oui, s'il y reste, si on ne le fait pas disparaître par une soustraction effectuée. C'est la statique surtout qui nous le montre. La grandeur négative est alors là comme une force non composée et dirigée à gauche, et se composant naturellement d'elle-même. Ces cas particuliers introduits, l'analyse a révélé toute la suite continue des inclinaisons, en offrant des résultats extraordinaires, qui ne paraissaient pas de même nature que les données. Ils l'étaient cependant, puisqu'ils étaient sur une échelle de variation dont les données étaient des cas particuliers; mais ils étaient dans des intervalles qu'on n'avait pas prévus, et ces résultats étaient multiples ou indéterminés parce que les cas particuliers introduits l'étaient aussi. Si l'on a un moyen régulier de

caractériser les données, c'est-à-dire, de *mesurer* leur variation sous le point de vue en question, il n'y aura plus ni multiplicité ni indétermination. Or ce moyen se trouve dans *l'angle* des expressions modulées, ou dans *l'exposant* des exponentielles imaginaires, puisque l'inclinaison y est caractérisée et *mesurée.* Donc avec de pareilles expressions comme éléments du calcul, *on doit avoir des résultats uniques et déterminés.* C'est ce que nous avons voulu annoncer dans l'article (42).

Suite des exponentielles et logarithmes.

117. Vient maintenant le troisième cas, celui où la *base* et *l'exposant* sont *tous les deux* imaginaires ou en général *non positifs.* Nous connaissons le résultat d'une base positive e avec un exposant quelconque. Si la base est imaginaire ou en général non positive, il y a moyen de *faire passer son imaginarité à l'exposant*, et alors on retombe dans le cas de l'exposant seul imaginaire. En effet: si cette base est une imaginaire avec la forme $a+b\sqrt{-1}$, on pourra d'abord la *moduler*, et elle prendra la forme $p(cos\alpha+sin\alpha\sqrt{-1})$; et cette expression peut se traduire par l'exponentielle $e^{m+\alpha\sqrt{-1}}$, en entendant par m l'exposant qu'il faudrait mettre à e pour faire p ou le module, c'est-à-dire que m est le *logarithme du module.*

Maintenant il est facile de voir l'effet d'un exposant quelconque sur cette expression $e^{m+\alpha\sqrt{-1}}$ comme base. Le nouvel exposant devra multiplier l'exposant qu'a déjà e. Pour faciliter cette multiplication on pourra *moduler* l'exposant que e a déjà, ainsi que celui qui doit le mul-

tiplier. On pourrait aussi lui donner la *forme exponentielle.* Le produit de ces deux exposants, sera un exposant imaginaire affectant e, dont nous connaissons l'effet.

118. Mais nous pouvons aussi considérer le nouvel exposant seul, et découvrir l'effet de ses variations sur l'exponentielle, comme nous avons fait pour la base positive (102). Cet effet est remarquable et a beaucoup de rapport avec celui du cas de la base positive e. Avec la base e, l'exponentielle engendrait le plan, quand l'exposant engendrait une bande horisontale dont la largeur était 2π. Avec un exposant imaginaire la fonction engendrera le plan, quand *l'extrémité de l'exposant engendrera une bande dont la largeur est celle de l'ancienne ou* 2π, *divisée par le module de l'exposant de la base ; et cette bande ne sera pas horisontale, mais elle aura une inclinaison qui sera celle de ce même exposant, prise en sens contraire.*

En effet, l'exposant de la base doit multiplier le nouvel exposant. On peut imaginer que l'exposant de la base est modulé et que l'autre ne l'est pas, et la multiplication peut également se faire. Le second exposant garde donc sa partie réelle et sa partie imaginaire en forme de coordonnées ou composantes rectangulaires. Le module de l'exposant de la base multiplie ces coordonnées et leur fait engendrer une bande dont la largeur est celle qu'elles auraient engendrée sans multiplication, multipliée par ce module. Or nous savons que (102) si l'exposant total engendre une bande large de 2π, la fonction engendre le plan. Mais pour que l'exposant engendre une bande large de 2π avec la multiplication du module, il faut que sans multiplication il en engendre une dont la largeur soit 2π divisé par le module.

Secondement, comme l'unité imaginaire de l'exposant, la base, par sa multiplication, fait tourner de son inclinaison les coordonnées du second exposant; pour qu'après cette action, la bande engendrée soit horisontale, elle doit avoir avant la multiplication, une inclinaison égale à celle de l'unité de l'exposant (immédiat) prise en sens contraire, pour qu'elle puisse être détruite.

Ce que nous avons vu (105) est un cas particulier de ceci. La base e n'était affectée que d'un exposant positif, ou sans inclinaison, qui modifiait seulement la largeur de la bande en la laissant horisontale.

119. Les conclusions des articles (102), (103), (104) sont donc modifiées ou généralisées : c'est-à-dire, que les bandes n'ont plus une position, une largeur particulières. Mais la largeur et la direction des bandes sont *réglées* par l'exposant de la base, de l'exposant immédiat qu'a la base avant de recevoir le nouvel exposant ou exposant *proposé*.

Si l'extrémité de l'exposant proposé décrit *deux bandes*, *trois bandes*, etc, : la fonction décrira le plan entier, *une fois*, *deux fois*, etc.

Ce n'est plus une verticale qui partage les bandes en deux parties répondant l'une à l'extérieur du cercle et l'autre à l'intérieur, mais c'est une droite partant de l'origine et *perpendiculaire aux bandes*.

L'extrémité de l'exposant en décrivant une parallèle aux bases des bandes, fait décrire à la fonction *une droite* partant de l'originè. L'inclinaison de cette droite est mesurée par *la distance à l'origine* de cette parallèle, en comptant la largeur d'une bande pour un tour.

La fonction décrit une *circonférence* ou deux ou trois, quand l'extrémité de l'exposant marche *perpendiculairement* aux bandes et qu'elle en traverse une, deux, trois, etc. ces rapprochements sont faciles.

120. Considérons l'inclinaison de la bande, relativement à l'inclinaison de la base. A mesure que la base tourne, la direction de la bande tourne aussi, mais beaucoup moins vite. Elle ne fait qu'un quart de tour pendant que la base fait une infinité de circonférences. Pour plus de simplicité supposons que la base soit $e^{1+\alpha\sqrt{-1}}$. La grandeur α en variant mesure les arcs ou les circonférences décrites par la base; et cette même grandeur, considérée relativement à l'exposant, règle bien l'inclinaison, mais elle la règle en servant de tangente trigonométrique à cette inclinaison. L'angle de cet exposant (118) est le même en grandeur que celui de la bande. L'inclinaison de la bande a donc pour *tangente trigonométrique l'arc décrit par la base.* Il faut donc que cette base décrive un arc infiniment grand à partir de zéro, pour que la bande tourne *d'un angle droit.* La bande peut donc tourner de *deux angles droits*, la base tournant jusqu'à l'infini positif, et jusqu'à l'infini négatif.

121. Une base *négative*, ou *imaginaire*, ou en général *non positive* peut-elle servir de base pour un système de logarithmes (des nombres ordinaires ou positifs)?

Il s'agit de voir si avec une base inclinée ou e ayant déjà un exposant incliné, on peut, avec un second exposant, que nous appellerions le logarithme, faire engendrer à la fonction la suite des nombres positifs. Or nous savons par ce qui précède, que l'extrémité du second

exposant décrivant les bases des bandes inclinées convenablement, la fonction décrit, une *droite positive*. Ce chemin, qui est tout aussi régulier que la marche des logarithmes usités, qui d'ailleurs n'en sont qu'un cas particulier, pourrait bien *être appelé logarithme*. Si l'on prenait le chemin fait sur la base de la première bande, ce logarithme serait plus *net*. Mais si on prenait le chemin fait sur les autres bases, le logarithme serait accompagné d'une partie qui ferait la largeur d'une bande, de deux, etc., suivant la distance à l'origine, de la base que l'on considère. Cette partie serait imaginaire ou à angle droit avec l'autre partie du logarithme. Elle serait analogue aux parties *imaginaires connues*, 2π, 4π, etc., qui viennent s'adjoindre aux logarithmes usités (109).

En bonne règle le logarithme est alors, dans un cas comme dans l'autre, la *résultante* des deux parties, quoique ordinairement on n'en considère qu'une.

Nous concluons donc qu'on pourrait *avec une pareille base* avoir des logarithmes. Mais ils ne *seraient pas réels*; ils seraient *inclinés ou imaginaires*. Nous avons dit qu'ils seraient réguliers parce que l'on pourrait regarder comme logarithme numérique, seulement le module de cet exposant.

Si l'on met aux logarithmes la condition d'être réels, il est vrai qu'on ne peut avoir des *logarithmes réels des nombres positifs*, *qu'avec une base positive*.

122. Les grandeurs *négatives*, les grandeurs *imaginaires* ont-elles des logarithmes? En ont-elles avec toutes les bases? La réponse à cette question serait la répétition de ce qui précède, sur la marche de l'exposant et de la

fonction. Oui toute grandeur a un logarithme, et en a un avec une base quelconque, *en généralisant l'idée de logarithme*; et même n'en a *qu'un*, si l'on se rappelle ce que nous avons dit sur l'unité des résultats. Un nombre semble avoir deux, trois, quatre logarithmes, ainsi que nous l'avons dit; mais ce n'est pas le même nombre, il y a comme l'on sait plusieurs nombres dans un, qui diffèrent par un tour, deux, trois etc., et ce sont ces différents nombres qui ont les différents logarithmes dont on parle et dont nous avons parlé nous-même (109).

Racines des équations exponentielles.

123. Nous avons démontré (49) que toute équation algébrique a une racine. Nous pouvons également faire voir que *toute équation exponentielle en a une.* Nous pouvons même généraliser cette équation exponentielle en la prenant de la forme

$$ax^m + bx^n + cx^p \; \ldots\ldots + \alpha^x + \beta^x + \text{etc.} = 0,$$

c'est-à-dire, que nous pouvons y supposer des termes algébriques et des termes exponentiels en même temps.

x en variant d'une manière absolue, je veux dire en grandeur et en direction, peut, d'après ce que nous avons vu, faire prendre à la partie algébrique, toute valeur que l'on voudra. Chaque terme exponentiel, peut aussi prendre par la variation de x la valeur que l'on voudra. Il s'agit de savoir si la résultante (de tous les termes exponentiels), peut la prendre. Si les termes variaient d'une manière indépendante, s'ils étaient par exemple $\alpha^x + \beta^y$, la chose serait évidente: avec deux composantes qui

peuvent devenir ce que l'on veut, *on peut obtenir la résultante que l'on veut.* Mais nous avons

$$\alpha^x + \beta^x + \gamma^x + \ldots\ldots,$$

c'est-à-dire, que la variation de tous les termes est entrainée par la même lettre.

Je remarque que l'on peut faire varier chaque terme d'une manière continue et pour la longueur et pour l'inclinaison, en faisant varier x d'une manière continue et dans sa partie réelle et dans sa partie imaginaire, et ces variations peuvent avoir lieu séparément. Je fais donc varier x de manière à ce que la longueur de chaque terme croisse d'une manière continue. La résultante des trois termes variera de longueur d'une manière continue; et son extrémité décrira une ligne continue de zéro à l'infini. Nous n'avons pas besoin d'examiner si elle est droite ou courbe. Je fais maintenant varier x de manière à faire tourner les composantes, mais *infiniment peu.* La ligne décrite par l'extrémité de la résultante se déplacera infiniment peu; ainsi de suite. Donc l'extrémité de la résultante ira sur tous les points du plan par la variation de x.

Le raisonnement que nous venons de faire sur les termes qui varient par leur exposant peut se faire sur les termes qui varient par la base, mais il a été fait précédemment. De plus le même raisonnement convient encore pour la résultante qui lie la partie exponentielle et la partie algébrique (ou à base variable). Donc l'extrémité de la résultante finale peut aller où l'on veut: on peut donc la mettre en opposition avec le terme constant, s'il y en a un, ou bien l'amener à l'origine si le terme cons-

tant est zéro. Donc *une pareille équation a une racine* et cette racine est *de forme imaginaire*.

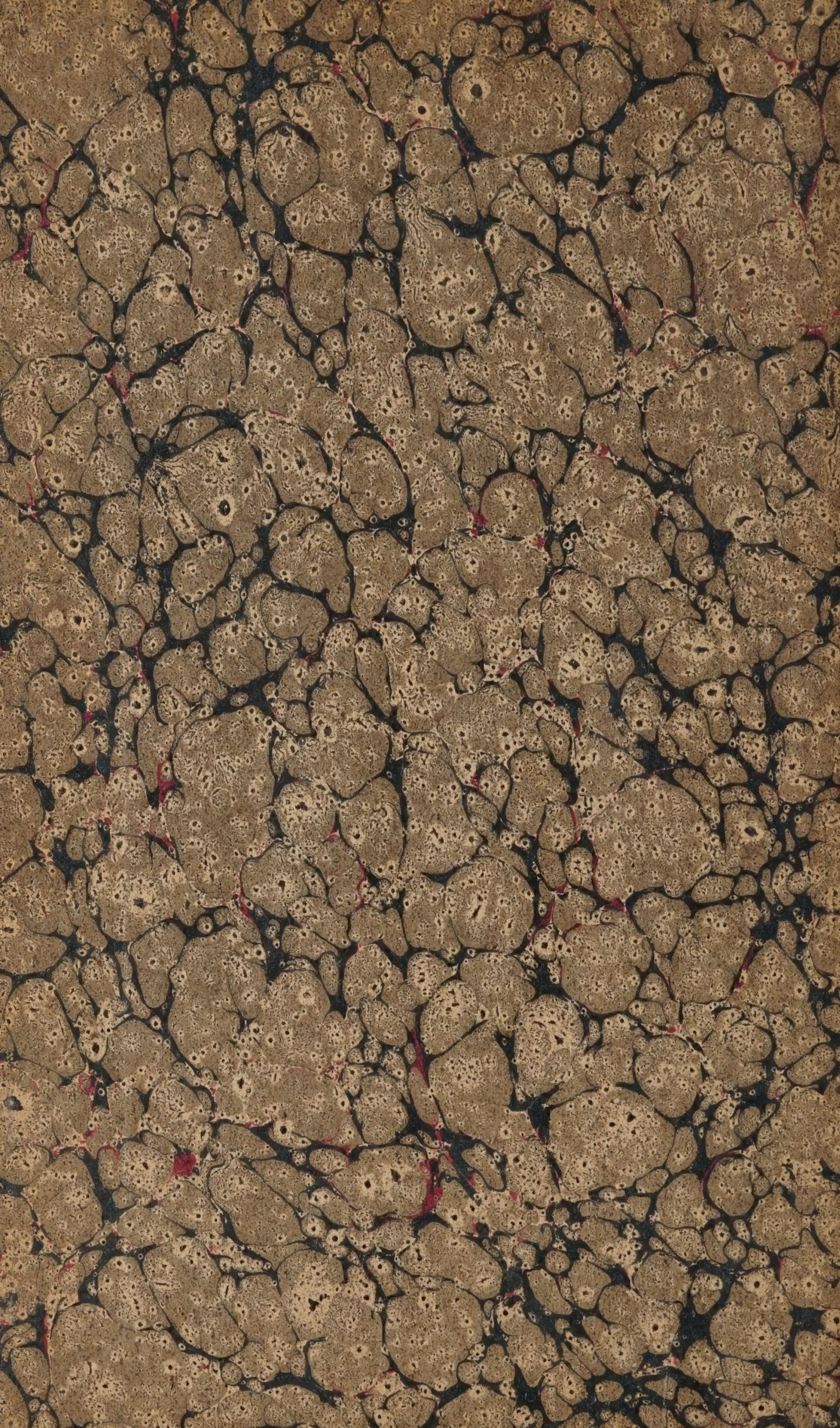
En parlant des racines nous n'exceptons pas l'*infini* imaginaire ou autre, qui peut bien être racine.

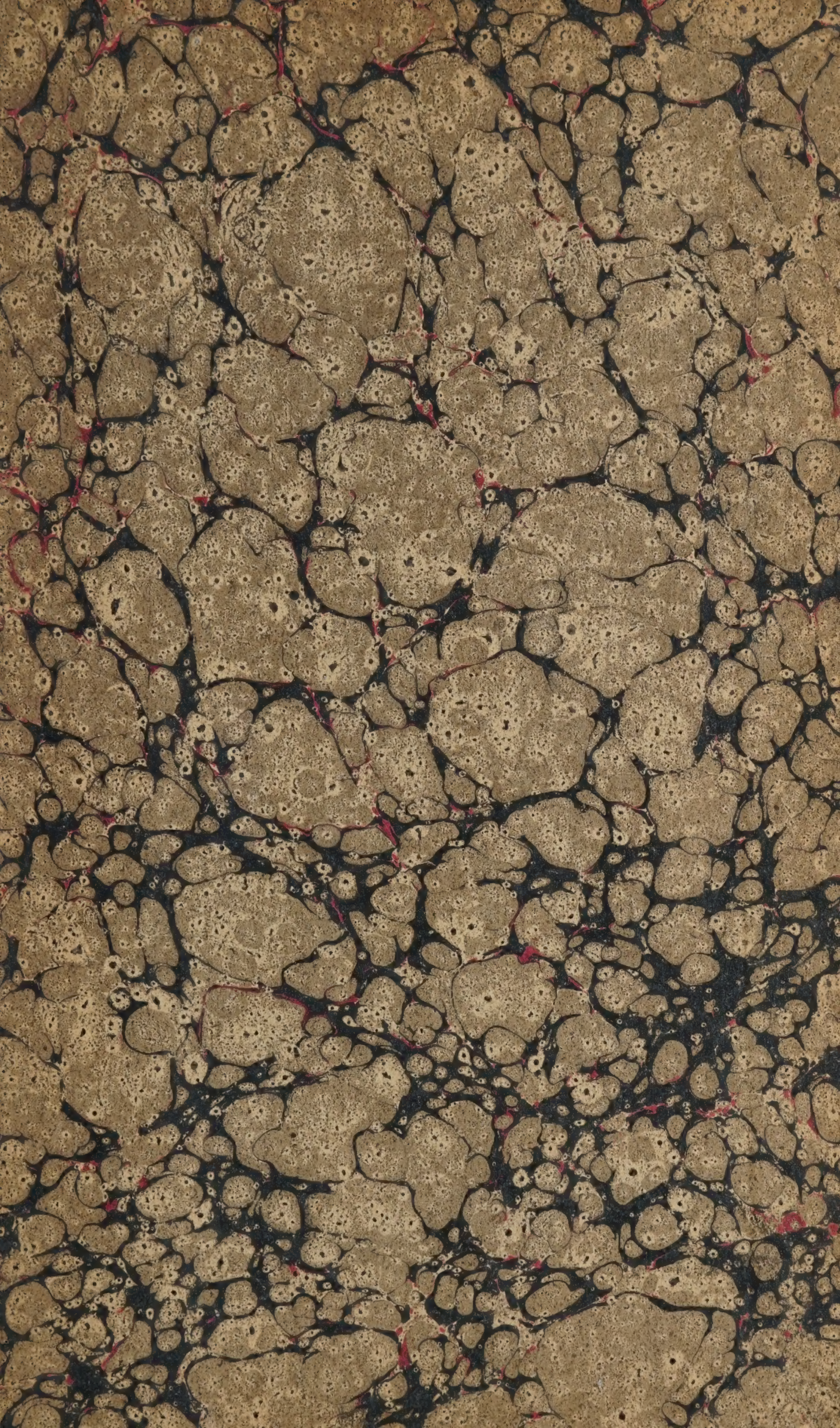
124. Il est facile de voir sans que nous ayons besoin de le développer, que s'il y a des coefficients réels ou imaginaires, *ils ne changent rien à cette conclusion*. Car ces coefficients modifient les composantes dans leur direction ou dans leur longueur, *mais ne détruisent pas la continuité*. Les bases α, β, γ..... *peuvent aussi être imaginaires. Les exposants* m, n, p... *aussi*. L'imaginarité ne détruit rien de nos raisonnements, et ne doit rien détruire, puisque l'imaginarité est pour ainsi dire un état naturel des grandeurs considérées géométriquement.

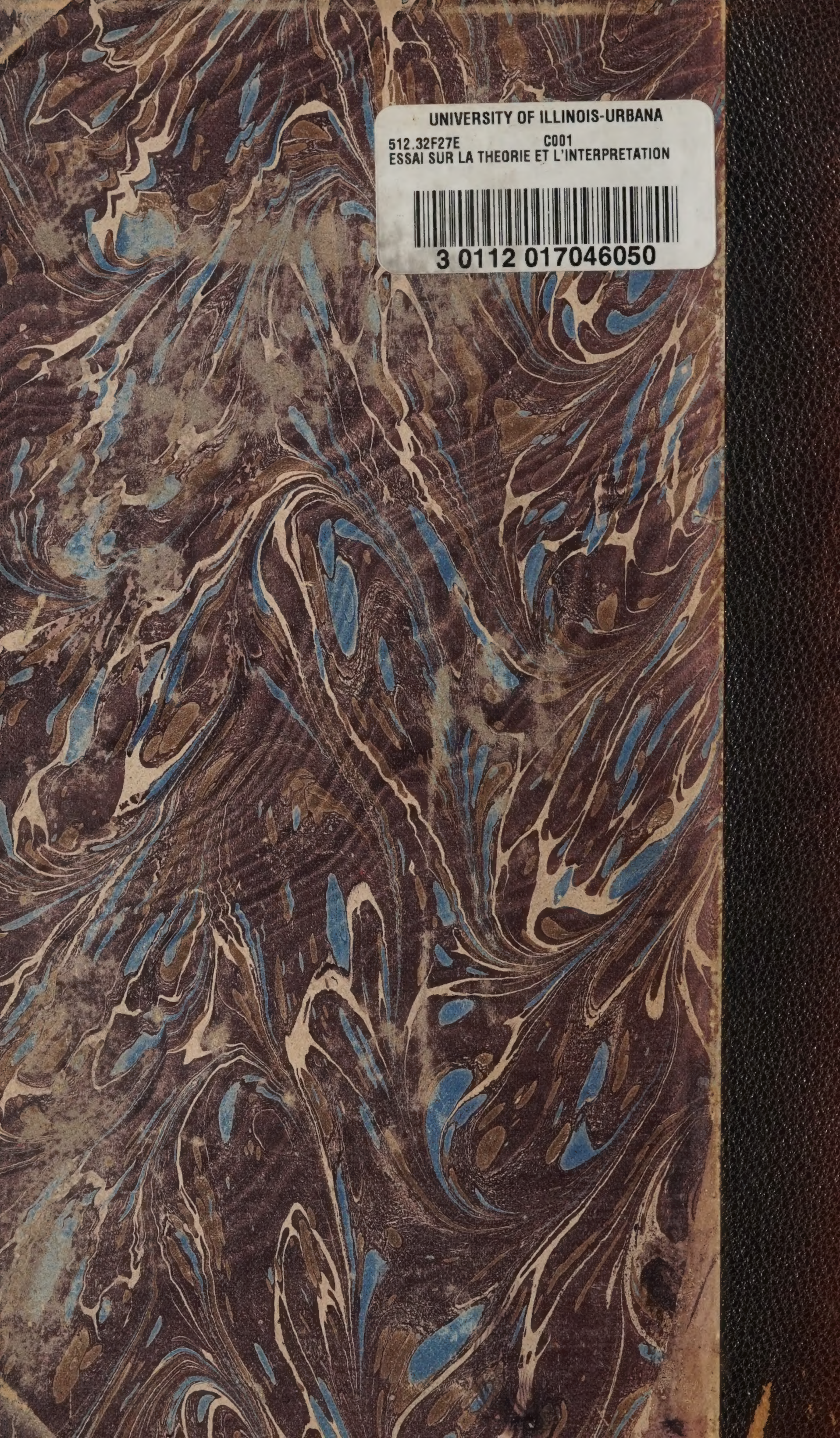
Comme l'imaginarité des constantes influe sur le départ des composantes, pour le rendre symétrique ou non symétrique, elle peut influer sur la *conjugaison* des racines, ainsi que nous l'avons déjà vu. Et il y aurait ici des détails à donner que l'on sentira et dont nous nous dispensons. On voit par exemple que si tous les éléments constants sont réels, les racines doivent être en général *conjuguées*, parce qu'en tournant d'en bas, on obtiendra ce qu'on a obtenu en tournant d'en haut. Je dis en général car il y aurait des remarques à faire.

125. Nous ne parlons pas du cas où la base et l'exposant varient en même temps. Cela nous conduirait dans des considérations que nous développerons plus tard.

FIN DU PREMIER MÉMOIRE.






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.32F27E C001
ESSAI SUR LA THEORIE ET L'INTERPRETATION
3 0112 017046050